1

解答解説のページへ

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a，b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

整数 a, b は等式 $3^a-2^b=1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば, a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

4

解答解説のページへ

三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h=\dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle \mathrm{A}=2\alpha$，$\angle \mathrm{B}=2\beta$，$\angle \mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1)　$h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2)　三角形 ABC が直角三角形のとき $h\leqq\sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3)　一般の三角形 ABC に対して $h\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

5

解答解説のページへ

α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1)　方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

6

解答解説のページへ

xy 平面内の図形

$$S:\begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1)　S を xy 平面に図示せよ。

(2)　V を求めよ。

1　　問題のページへ

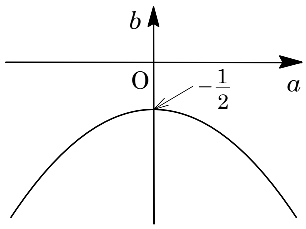
(1)　$C: y=(x-a)^2+b$ ……①，$D: y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2,\ 2x^2-2ax+a^2+b=0 \ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1,\ -a^2-2b=1$$

よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2)　(1)のとき，C と D の 2 交点をを結ぶ直線は，①＋②より，

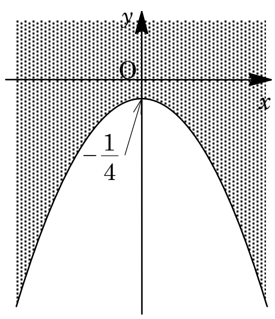
$$2y=(x-a)^2+b-x^2,\ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで，直線⑤が点 $(x,\ y)$ を通過する条件は，⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき，⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので，

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると，$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり，図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また，通過領域は実数解条件で処理しています。

2

問題のページへ

(1)　1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき，k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず，$X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から，その確率 $p(1)$ は，$p(1) = \dfrac{1}{n}$ である。

次に，$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \geqq n$ となるのは，$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より，その確率 $p(n)$ は，

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{1}{n^{n-1}}$$

(2)　$X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 \geqq n$ となるのは，$X_1 = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは，$X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(2)$ は，

$$p(2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)\right\}$$

$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$X_1 + X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + X_3 \geqq n$ となるのは，$X_1 + X_2 = k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のときは，$(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$，$(2,\ k-2)$，$\cdots$，$(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで，$X_3 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(3)$ は，

$$p(3) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} (k^2 - 1) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)\right\} = \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

3

問題のページへ

(1)　整数 a, b に対して，$3^a - 2^b = 1$ ……①より，$3^a = 2^b + 1$ ………②

すると，$3^a = 2^b + 1 > 1$ となるので，$a \geqq 1$ であり，このとき①より，

$$2^b = 3^a - 1 \geqq 3^1 - 1 = 2$$

よって，$b \geqq 1$ であり，a, b はともに正となる。

(2)　$b > 1$ すなわち $b \geqq 2$ のとき，2^b が 4 の倍数であることに着目して，以下，$\mathrm{mod}\,4$ で記述すると，②の右辺は $2^b + 1 \equiv 1$ である。

ここで，k を自然数として a を偶奇に分け，$9 \equiv 1$ に注意すると，

(i)　$a = 2k$ のとき　$3^a = 3^{2k} = 9^k \equiv 1^k \equiv 1$

(ii)　$a = 2k - 1$ のとき　$3^a = 3^{2(k-1)+1} = 9^{k-1} \cdot 3 \equiv 1^{k-1} \cdot 3 \equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，a が偶数のときである。

(3)　(1)より，a, b はともに自然数なので，

(i)　$b = 1$ のとき　②より $3^a = 2^1 + 1 = 3$ となり，$a = 1$ である。

(ii)　$b \geqq 2$ のとき　(2)より $a = 2k$ となり，②より，

$$3^{2k} = 2^b + 1,\ (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^b \ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$ であり，さらに 2^b の約数が $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$ であることに着目すると，③より，

$$3^k - 1 = 2,\ 3^k + 1 = 2^2$$

これより，$k = 1$ から $a = 2$ となり，また $2 \cdot 2^2 = 2^b$ から $b = 3$ である。

(i)(ii)より，$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 3)$

［解　説］

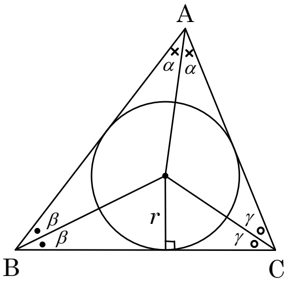
整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

4

問題のページへ

(1)　$\triangle$ABC において，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$ より，

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \cdots\cdots\cdots①$$



ここで，$\triangle$ABC の内接円の半径 r に対して，

$$BC = \frac{r}{\tan\beta} + \frac{r}{\tan\gamma} = r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$
$$= r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ となり，$BC = r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \cdots\cdots\cdots②$

また，$\triangle$ABC の外接円の半径 R に対して，正弦定理から，

$$BC = 2R\sin 2\alpha = 4R\sin\alpha\cos\alpha \cdots\cdots\cdots③$$

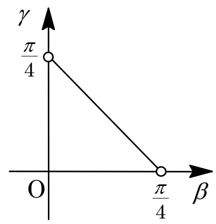
②③から，$r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r = 4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

$$h = \frac{r}{R} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$\triangle$ABC が直角三角形のとき，$\angle A = \frac{\pi}{2}\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)$としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ となり，④より，

$$h = 4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\}$$
$$= \sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma) - \cos\frac{\pi}{4}\right\} = \sqrt{2}\cos(\beta-\gamma) - 1$$



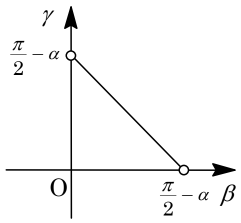
ここで，$-\frac{\pi}{4} < \beta - \gamma < \frac{\pi}{4}$ なので，$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(\beta-\gamma) \leqq 1$ から，

$$h \leqq \sqrt{2}\cdot 1 - 1 = \sqrt{2} - 1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma) = 1$ すなわち $\beta = \gamma$ のとき成立するので，このとき$\triangle$ABC は直角二等辺三角形となる。

(3)　まず，α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h = 4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\} = 2\sin\alpha\left\{\cos(\beta-\gamma) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right\}$$
$$= 2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma) - \sin\alpha\}$$



ここで，$-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < \beta - \gamma < \frac{\pi}{2} - \alpha$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < \cos(\beta-\gamma) \leqq 1$$

すると，$\sin\alpha < \cos(\beta-\gamma) \leqq 1$ から，

$$h \leqq 2\sin\alpha(1 - \sin\alpha) = 2\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = -2\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，$\triangle$ABC は正三角形となる。

［解 説］

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。

5

問題のページへ

(1)　複素数αに対し，複素数zの方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，$z=0$では成立しないことより$z\neq 0$となり，①より，

$$\alpha=\frac{z^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z}\ \cdots\cdots\cdots②$$

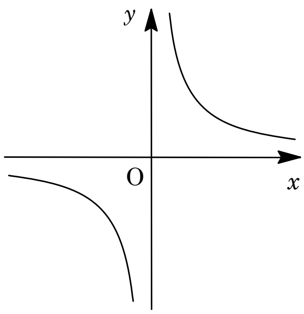
さて，方程式①が実数解をもつとき，tを実数として$z=t$を②に代入すると，

$$\alpha=t+\frac{2}{t}i\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\alpha=x+yi$とおくと，③より，

$$x=t,\ \ y=\frac{2}{t}$$

これより，点αは複素数平面上で双曲線$y=\dfrac{2}{x}$を描く。図示すると，右図のようになる。



(2)　方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつとき，θを実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

②に代入すると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$から，

$$\alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，点αを原点を中心に$\dfrac{\pi}{4}$回転させた点βは，

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

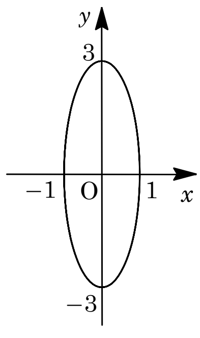
④⑤より，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\}$となり，

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{\sqrt{2}}{2}\{(-\cos\theta+\sin\theta)+3i(\sin\theta+\cos\theta)\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\ \cdots\cdots\cdots⑥\end{aligned}$$

ここで，$\beta=x+yi$とおくと，⑥より，

$$x=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \ y=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，点βは複素数平面上で楕円$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$を描く。図示すると，右図のようになる。



［解　説］

複素数平面上の軌跡に関する問題です。点αや点βの軌跡を求めるので，与えられた①ではなく，変形した②をもとに計算を進めています。

6　　　　問題のページへ

(1)　条件より，$S: x+y^2 \leqq 2$ ……①，$x+y \geqq 0$ ……②，$x-y \leqq 2$ ……③

まず，①と②の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x+y=0$ から，

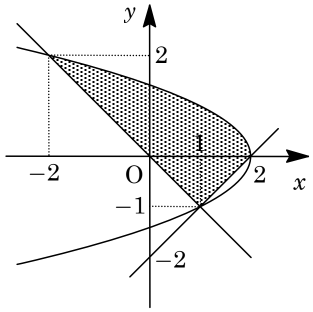
$$y^2-y=2,\ (y-2)(y+1)=0$$

よって，$(x,\ y)=(-2,\ 2)$，$(1,\ -1)$

また，①と③の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x-y=2$ から，

$$y^2+y=0,\ y(y+1)=0$$

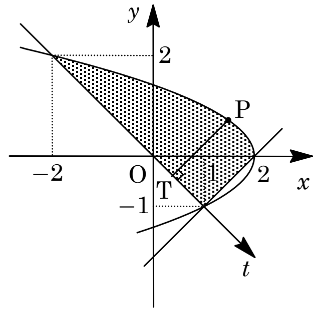
よって，$(x,\ y)=(2,\ 0)$，$(1,\ -1)$



以上より，図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　①の境界線上に点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ をとり，P から直線 $y=-x$ に垂線を下ろし，その足を T とおく。

そして，右図のように t 軸を設定し，$\mathrm{OT}=|t|$ とすると，$\mathrm{T}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と表せる。



さて，P と直線 $y=-x$ すなわち $x+y=0$ との距離は，

$$\mathrm{PT}=\frac{|-y^2+2+y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-y^2+y+2|$$

ここで，$0 \leqq y \leqq 2$ において，$-y^2+y+2=-(y+1)(y-2) \geqq 0$ から，

$$\mathrm{PT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2) \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ の単位ベクトルの成分は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}=(-y^2+2,\ y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+1,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-1\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y+1$ となり，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2-y+2) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{PT}^2\,dt$$

ここで，変数を t から y に置換すると，⑤より，$t=-2\sqrt{2} \to \sqrt{2}$ のとき $y=2 \to 0$ となり，また $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy$ から，

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{2}^{0}\frac{1}{2}(-y^2+y+2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_{0}^{2}(-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_{0}^{2}(2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\Big]_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\Big)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

［解　説］

斜回転体の体積を求める問題です。計算量に配慮した設定となっていますが，それでも最後の定積分は面倒です。