1

解答解説のページへ

xy 平面における曲線 $y=\sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1)　$n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2)　この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，数列$\{x_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a,\ \ x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$a > 0$ のとき，数列$\{x_n\}$が発散することを示せ。

(2)　$-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$-1 < a < 0$ のとき，数列$\{x_n\}$の極限を調べよ。

4

解答解説のページへ

実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1) $[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ。

(2) 整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$$[(ax+b)^4]=-1$$

5

解答解説のページへ

(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx = \int_{0}^{1} \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(2)　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1} (e^x - e^t + 1)f(t)\,dt$$

6

解答解説のページへ

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2)　$p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3)　$p(n,\ 2)$ を求めよ。

1　　問題のページへ

$y=\sin x$ に対して $y'=\cos x$ となり，点 $(\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線の方程式は,

$$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha),\quad y=x\cos\alpha-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\alpha\neq\beta$ として，点 $(\beta,\ \sin\beta)$ における接線の方程式は,

$$y=x\cos\beta-\beta\cos\beta+\sin\beta\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件より，①と②が直交するので，$\cos\alpha\cos\beta=-1\ \cdots\cdots\cdots③$

ここで，③の両辺に絶対値をとると，$|\cos\alpha||\cos\beta|=1$ となり，このとき $|\cos\alpha|<1$ と仮定すると $|\cos\beta|>1$ となり不適である。これより，$|\cos\alpha|=1$ であり，③から,

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

さらに，一般性を失うことなく，$\cos\alpha\geqq\cos\beta$ とできるので,

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1)$$

そこで，m, n を整数として，$(\alpha,\ \beta)=(2m\pi,\ (2n+1)\pi)$ とおくと，①②は,

$$y=x-2m\pi\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=-x+(2n+1)\pi\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④を連立して，$2y=(-2m+2n+1)\pi$，$y=\dfrac{2(n-m)+1}{2}\pi$

$k=n-m$ とおくと，求める交点の y 座標は，整数 k を用いて $y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ と表せる。

［解 説］

三角関数のグラフの接線を題材にした問題です。ポイントは③の処理だけです。

2

問題のページへ

(1)　$a>0$，$a\neq 1$のとき，$\log_a(x-6)>\dfrac{1}{2}\log_a(12-x)$ ………①

$x-6>0$ かつ $12-x>0$，すなわち $6<x<12$ ……②において，

$$2\log_a(x-6)>\log_a(12-x),\ \log_a(x-6)^2>\log_a(12-x)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(i)　$0<a<1$のとき　③より，$(x-6)^2<12-x$ となり，

$$x^2-11x+24<0,\ (x-3)(x-8)<0$$

すると，$3<x<8$ となるが，②と合わせると $6<x<8$ である。

よって，①を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii)　$a>1$のとき　③より，$(x-6)^2>12-x$ となり，$(x-3)(x-8)>0$

すると，$x<3$, $8<x$ となるが，②と合わせると $8<x<12$ である。

よって，①を満たす整数 x は $x=9$, 10, 11 となる。

(2)　$a>0$，$a\neq 1$のとき，正の整数 n に対し，$\log_a(x-n)>\dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$ ………④

$x-n>0$ かつ $2n-x>0$，すなわち $n<x<2n$ ……⑤において，

$$2\log_a(x-n)>\log_a(2n-x),\ \log_a(x-n)^2>\log_a(2n-x)\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(i)　$0<a<1$のとき　⑥より，$(x-n)^2<2n-x$ となり，

$$(x-n)^2-(2n-x)<0,\ x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0$$

ここで，$f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと，

$$f(n)=-n<0,\ f(2n)=n^2>0$$

⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について，④を満たす整数 x が存在する条件は，

$$f(n+1)=1-(n-1)=2-n<0$$

よって，$n>2$ から，n は 3 以上の整数である。

(ii)　$a>1$のとき　⑥より，$(x-n)^2>2n-x$ となり，$x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$

$f(n)<0$，$f(2n)>0$ に注意し，⑤の $x=n+1$, $n+2$, …, $2n-1$ について，④を満たす整数 x が存在する条件は，

$$f(2n-1)=(n-1)^2-1=n(n-2)>0,\ n>2$$

よって，$n>2$ から，n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より，④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は，n が 3 以上の整数である。

［解 説］

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを念頭に，条件を数式化しています。

3

問題のページへ

(1)　$x_1=a$，$x_{n+1}=x_n+{x_n}^2$ ……①で定められる数列$\{x_n\}$に対して，$a>0$のとき，

$$x_{n+1}-x_n={x_n}^2\geqq 0$$

これより$\{x_n\}$は単調に増加し，$x_n\geqq x_1=a>0$となるので，①から，

$$x_{n+1}\geqq x_n+a^2$$

よって，$x_n\geqq x_1+(n-1)\cdot a^2=a^2n+a-a^2$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$となる。

(2)　$-1<a<0$のとき，$-1<x_n<0$が成り立つことを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$x_1=a$で，$-1<a<0$から成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$-1<x_k<0$であると仮定すると，①より，

$$x_{k+1}=x_k+{x_k}^2=\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

すると，$-1<x_k<0$から$-\dfrac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$となり，$-1<x_{k+1}<0$である。

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての正の整数nに対して，$-1<x_n<0$が成り立つ。

(3)　$-1<a<0$のとき，(2)から$-1<x_n<0$となり，①より，

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n+{x_n}^2}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$$

すると，$-\dfrac{1}{x_{n+1}}=-\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{x_n+1}$となり，ここで$y_n=-\dfrac{1}{x_n}$とおくと，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{x_n+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$0<x_n+1<1$から$\dfrac{1}{x_n+1}>1$となり，②より，

$$y_{n+1}>y_n+1$$

すると，$y_1=-\dfrac{1}{a}$より，$n\geqq 2$で，$y_n>y_1+(n-1)\cdot 1=n-\dfrac{1}{a}-1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{y_n}\right)=0$である。

［解　説］

漸化式で定められた数列の極限の問題です。一般項は求まらないタイプです。(1)と(2)については，方針を立てるのに困難はありませんでしたが，(3)は結論がすぐに予測できるものの，定型的な処理ではうまくいかず，いろいろ考えてしまいました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) 整式$A(x)$をx^2+1で割った余りを$[A(x)]$と表す。

ここで，$2x^2+x+3$，x^5-1をx^2+1で割ると，

$$2x^2+x+3=(x^2+1)\cdot 2+(x+1),\quad x^5-1=(x^2+1)(x^3-x)+(x-1)$$

よって，$[2x^2+x+3]=x+1$，$[x^5-1]=x-1$である。

また，$[2x^2+x+3][x^5-1]=(x+1)(x-1)=x^2-1$を$x^2+1$で割ると，

$$x^2-1=(x^2+1)\cdot 1+(-2)$$

よって，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]=-2$である。

(2) $A(x)$，$B(x)$をx^2+1で割り，商をそれぞれ$Q_1(x)$，$Q_2(x)$とすると，

$$A(x)=(x^2+1)Q_1(x)+[A(x)],\quad B(x)=(x^2+1)Q_2(x)+[B(x)]$$

$$A(x)B(x)=(x^2+1)\{(x^2+1)Q_1(x)Q_2(x)+Q_1(x)[B(x)]+Q_2(x)[A(x)]\}$$
$$+[A(x)][B(x)]$$

よって，$[A(x)B(x)]=[[A(x)][B(x)]]\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)
$$\begin{aligned}(x\sin\theta+\cos\theta)^2&=x^2\sin^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=(x^2+1)\sin^2\theta+2x\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=(x^2+1)\sin^2\theta+x\sin 2\theta+\cos 2\theta\end{aligned}$$

よって，$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2]=x\sin 2\theta+\cos 2\theta$である。

(4) $(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2=(x^2+1)\cdot a^2+2abx+b^2-a^2$より，

$$[(ax+b)^2]=2abx+b^2-a^2$$

ここで，(*)を利用すると，

$$\begin{aligned}[(ax+b)^4]&=[(ax+b)^2(ax+b)^2]=[[(ax+b)^2][(ax+b)^2]]\\&=[(2abx+b^2-a^2)^2]=2(2ab)(b^2-a^2)x+(b^2-a^2)^2-(2ab)^2\\&=4ab(b^2-a^2)x+(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\end{aligned}$$

条件より，$[(ax+b)^4]=-1$なので，

$$4ab(b^2-a^2)=0\cdots\cdots\cdots①,\quad (b^2-a^2)^2-4a^2b^2=-1\cdots\cdots\cdots②$$

①から，$a=0$のときは②が$b^4=-1$となり成立せず，また$b=0$のときは②が$a^4=-1$となり成立しない。これより，$b^2=a^2\neq 0$となる。

このとき，②は$-4a^4=-1$すなわち$a^4=\frac{1}{4}$から，$a^2=b^2=\frac{1}{2}$となり，

$$(a,\ b)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ （複号同順）$$

［解 説］

整式の除法が題材の論証問題です。内容は，見かけほどではありません。なお，(4)は(3)と独立に解いています。

5

問題のページへ

(1) $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ とおくと，$I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$

ここで，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$ となり，

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=-\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt$$

すると，$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ なので，

$$I=\int_{0}^{1}\Big\{\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\Big\}dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\{1-\cos(2\pi x)\}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

(2) 条件より，$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(e^x+1)\int_{-1}^{1}f(t)dt-\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$$

ここで，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt$ ……①，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$ ……②とおくと，

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+a(e^x+1)-b$$

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+a-\frac{b}{1+e^x}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+a-\frac{b}{1+e^t}\Big\}dt=\frac{1}{2}+2a-b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ となり，

$$a=-\frac{1}{2}+b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$$

ここで，$J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ として，$t=-s$ とおくと $dt=-ds$ となり，

$$J=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{1+e^{-s}}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^s}{e^s+1}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt$$

これより，$J+J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\Big\}dt=\int_{-1}^{1}dt=2$ となり，$J=1$ なので，

$$a=-\frac{1}{2}+b\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+ae^t-\frac{be^t}{1+e^t}\Big\}dt$ となり，$\displaystyle\int_{-1}^{1}e^t\,dt=e-\frac{1}{e}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt=\big[\log(1+e^t)\big]_{-1}^{1}=\log\frac{1+e}{1+e^{-1}}=\log e=1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}dt=\int_{-1}^{1}\Big\{\sin^2(\pi t)-\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\Big\}dt=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，$b=\dfrac{1}{2}+\left(e-\dfrac{1}{e}\right)a-b$ から，$b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2-1}{2e}a$ ………⑤

④⑤より，$a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2-1}{2e}a$ となり，$\dfrac{e^2-2e-1}{2e}a=\dfrac{1}{4}$ となり，

$$a=\frac{e}{2(e^2-2e-1)},\ b=\frac{e}{2(e^2-2e-1)}+\frac{1}{2}=\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}$$

以上より，$f(x)=\dfrac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}-\dfrac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}\cdot\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$ である。

［解 説］

積分方程式の問題です。置換え型と呼ばれるタイプの典型題ですが，ただ計算量は中途半端ではありません。(1)の誘導も含めてですが。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

(1)　条件の試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。

さて，試行を $n+1$ 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき，次の 2 つの場合がある。

(i)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個のとき

袋には，赤玉 4 個と白玉 6 個が入っているので，そこから赤玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\frac{4}{10}p(n,\ 1)=\frac{2}{5}p(n,\ 1)$ である。

(ii)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 2 個のとき

袋には，赤玉 3 個と白玉 7 個が入っているので，そこから白玉を 1 個取り出す。このときの確率は $\frac{7}{10}p(n,\ 2)$ である。

(i)(ii)より，$p(n+1,\ 2)=\frac{2}{5}p(n,\ 1)+\frac{7}{10}p(n,\ 2)$ となる。

(2)　試行を n 回繰り返し，取り出した赤玉が全部で 1 個であるのは，n 回のうち 1 回だけ赤玉を取り出し，それ以外は白玉を取り出す場合である。

初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っており，k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ だけに赤玉を取り出す確率は，$\left(\frac{5}{10}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{10}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$ となり，

$$p(n,\ 1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=\left(\frac{3}{5}\right)^{n}\cdot 5\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right\}=5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(3)　(1)(2)より，$p(n+1,\ 2)=\frac{2}{5}\left\{5\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+\frac{7}{10}p(n,\ 2)$ となり，

$$p(n+1,\ 2)=\frac{7}{10}p(n,\ 2)+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

また，$p(2,\ 2)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{5}$ となり，$p_n=p(n,\ 2)$ とおくと，$p_2=\frac{1}{5}$ で，

$$p_{n+1}=\frac{7}{10}p_n+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①を満たす 1 つの数列を $p_n=\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ($\alpha,\ \beta$ は定数) とおくと，

$$\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+2\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdots\cdots\cdots②$$

②から，$\frac{3}{5}\alpha=\frac{7}{10}\alpha+2$，$\frac{1}{2}\beta=\frac{7}{10}\beta-2$ となり，$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$

①－②より，$p_{n+1}-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{7}{10}\left\{p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{n}-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$ となり，

$$p_n-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^n-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{p_2-\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^2-\beta\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}\quad(n\geqq 2)$$

$(\alpha,\ \beta)=(-20,\ 10)$，$p_2=\dfrac{1}{5}$ を代入して,

$$p_n+20\left(\frac{3}{5}\right)^n-10\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left\{\frac{1}{5}+20\left(\frac{3}{5}\right)^2-10\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}$$
$$=\frac{49}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-2}=10\left(\frac{7}{10}\right)^n$$

よって，$p_n=10\left(\dfrac{7}{10}\right)^n-20\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となるので,

$$p(n,\ 2)=10\left(\frac{7}{10}\right)^n-20\left(\frac{3}{5}\right)^n+10\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 2)$$

［解 説］

丁寧な誘導のついた確率と漸化式の標準的問題です。なお, (3)の漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。