1

解答解説のページへ

a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y=f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$q>0$ とする。

(1) p, q の値を a を用いて表せ。また，$p>q$ であることを示せ。

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3) (2)の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a, b, d を正の実数とし, xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする。$\angle\mathrm{OAD}=15^\circ$, $\angle\mathrm{OBD}=75^\circ$, $\mathrm{AB}=6$

以下の問いに答えよ。

(1) $\tan 75^\circ$ の値を求めよ。

(2) a, b, d の値をそれぞれ求めよ。

(3) 2 点 O, D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また, 線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき, 方べきの定理 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AO}^2$, $\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{BO}^2$ を示せ。

(4) (3)の点 P, Q に対し, 積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$　　　(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式 $x+1 > 2\log_t(x+1)$ を示せ。

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

n を正の整数とする。2 つの整数 a_n，b_n を条件 $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ により定める。ここで，$\sqrt{2}$ は無理数なので，このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定まる。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いてそれぞれ表せ。さらに，b_4，b_5，b_6 の値をそれぞれ求めよ。

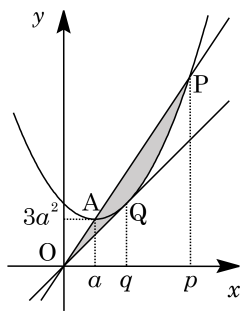
(2)　等式 $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2$ を求めよ。

(4)　$pb_6 - qb_5 = 1$，$0 \leqq p \leqq 100$，$0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 p，q の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=x^2-2ax+4a^2=(x-a)^2+3a^2$ に対して，放物線 $C: y=f(x)$ の頂点 A は $\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$ となり，これより直線 OA の方程式は，$y=3ax$ である。

ここで，C と OA の交点は，$x^2-2ax+4a^2=3ax$ より，

$$x^2-5ax+4a^2=0,\ (x-a)(x-4a)=0$$

$x\neq a$ の解は $x=4a$ より，$p=4a$ である。

また，$f'(x)=2x-2a$ より，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線の方程式は，$y-(q^2-2aq+4a^2)=(2q-2a)(x-q)$ となり，原点を通ることから，

$$-(q^2-2aq+4a^2)=(2q-2a)(-q),\ q^2-4a^2=0,\ (q-2a)(q+2a)=0$$

$q>0$ から，$q=2a$ である。

そして，$p-q=4a-2a=2a>0$ から，$p>q$ となる。

(2)　(1)から，$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ となり，右上図の網点部の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2-\int_{2a}^{4a}(x^2-2ax+4a^2)dx$$

$$=24a^3-4a^3-\Big[\frac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\Big]_{2a}^{4a}=20a^3-\Big(\frac{56}{3}a^3-12a^3+8a^3\Big)$$

$$=20a^3-\frac{44}{3}a^3=\frac{16}{3}a^3$$

(3)　$S=\frac{2}{3}$ のとき，$\frac{16}{3}a^3=\frac{2}{3}$ から $a^3=\frac{1}{8}$ となり，$a=\frac{1}{2}$ である。

［解　説］

放物線を題材とした穏やかな面積計算の問題です。

2

問題のページへ

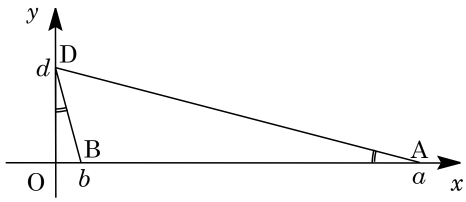
(1) $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2+\sqrt{3}$

(2) $\angle\mathrm{OAD} = 15^\circ$ より $\angle\mathrm{ODA} = 75^\circ$ となり，

$$a = d\tan 75^\circ = (2+\sqrt{3})d$$

$\angle\mathrm{OBD} = 75^\circ$ より $d = b\tan 75^\circ$ となり，

$$b = \frac{d}{\tan 75^\circ} = \frac{d}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})d$$



$\mathrm{AB} = 6$ から $a - b = 6$ となり，$(2+\sqrt{3})d - (2-\sqrt{3})d = 6$ から，

$$2\sqrt{3}d = 6,\ d = \sqrt{3}$$

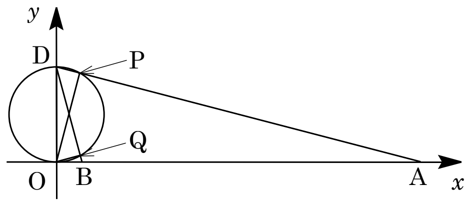
これより，$a = (2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} = 3+2\sqrt{3}$，$b = (2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} = -3+2\sqrt{3}$ である。

(3) 2 点 O, D を直径の両端とする円 C に対して，$\angle\mathrm{AOD} = \angle\mathrm{APO} = 90^\circ$ より，

$$\triangle\mathrm{AOD} \backsim \triangle\mathrm{APO}$$

すると，$\mathrm{AO} : \mathrm{AP} = \mathrm{AD} : \mathrm{AO}$ となり，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2 \cdots\cdots\cdots①$$



同様に，$\angle\mathrm{BOD} = \angle\mathrm{BQO} = 90^\circ$ より，$\triangle\mathrm{BOD} \backsim \triangle\mathrm{BQO}$

すると，$\mathrm{BO} : \mathrm{BQ} = \mathrm{BD} : \mathrm{BO}$ となり，$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BD} = \mathrm{BO}^2 \cdots\cdots\cdots②$

(4) ①から $\mathrm{AP} = \dfrac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{AD}} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+d^2}}$，②から $\mathrm{BQ} = \dfrac{\mathrm{BO}^2}{\mathrm{BD}} = \dfrac{b^2}{\sqrt{b^2+d^2}}$ となり，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BQ} = \frac{(ab)^2}{\sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}} = \frac{(-9+12)^2}{3\sqrt{(8+4\sqrt{3})(8-4\sqrt{3})}} = \frac{9}{12\sqrt{4-3}} = \frac{3}{4}$$

［解　説］

図形の計量問題です。なお，(3)の方べきの定理の証明は，簡略に記しています。

3

問題のページへ

(1)　$t>1$ のとき，条件(b)から $x \geqq 2\log_t x$ なので，両辺に 1 を加えて，

$$x+1 \geqq 2\log_t x+1 = 2\log_t x+\log_t t = \log_t tx^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

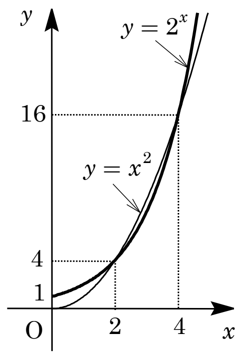
条件(a)より，$\sqrt{t}x - x > 1$ から $\sqrt{t}x > x+1$ となり，$tx^2 > (x+1)^2$

$$\log_t tx^2 > \log_t (x+1)^2 = 2\log_t (x+1) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$x+1 > 2\log_t (x+1)$

(2)　正の整数 n に対し，$n \leqq 2\log_2 n$ から $\log_2 2^n \leqq \log_2 n^2$ となり，

$$2^n \leqq n^2 \cdots\cdots\cdots ③$$



さて，$n=1$ のとき，$2^1 > 1^2$ より③は成立しない。

また，$n=2,\ 3,\ 4$ のとき，$2^2 = 2^2$，$2^3 < 3^2$，$2^4 = 4^2$ より③は成立する。

さらに，$n=5$ のとき，$2^5 > 5^2$ より③は成立しない。

以下，$n \geqq 5$ のとき，$2^n > n^2$ であることを証明する。

その準備のために，(1)において $t=2$ とおくと，

$$x > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ かつ } x \geqq 2\log_2 x \ \Rightarrow\ x+1 > 2\log_2 (x+1)$$

正の実数 x を正の整数 n に置き換えて変形すると，

$$n > \sqrt{2}+1 \text{ かつ } 2^n \geqq n^2 \ \Rightarrow\ 2^{n+1} > (n+1)^2$$

すると，帰納的に，$n \geqq 5$ のとき $2^n > n^2$ であり，③は成立しない。

以上より，$n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n は，$n=2,\ 3,\ 4$ である。

［解　説］

対数関数と数列の融合問題です。(2)は③の形にすると，ときどき見かける問題になります。そして，(1)の不等式の意味も判明します。

4

問題のページへ

(1)　$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ より，$(1+\sqrt{2})^{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$ となり，

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n=(1+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$$
$$=(a_n+2b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{2}$$

a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は整数，$\sqrt{2}$ は無理数なので，

$$a_{n+1}=a_n+2b_n\cdots\cdots\cdots①,\ b_{n+1}=a_n+b_n\cdots\cdots\cdots②$$

$(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$ なので，①②から，$(a_2,\ b_2)=(3,\ 2)$，$(a_3,\ b_3)=(7,\ 5)$

$(a_4,\ b_4)=(17,\ 12)$，$(a_5,\ b_5)=(41,\ 29)$，$(a_6,\ b_6)=(99,\ 70)$

(2)　$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$ より成り立っている。

(ii)　$n=k$ のとき　$(1-\sqrt{2})^k=a_k-b_k\sqrt{2}$ と仮定すると，①②から，

$$(1-\sqrt{2})^{k+1}=(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^k=(1-\sqrt{2})(a_k-b_k\sqrt{2})$$
$$=(a_k+2b_k)-(a_k+b_k)\sqrt{2}=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{2}$$

これより，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ である。

(3)　(1)(2)より，$(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n=2\sqrt{2}\,b_n$ となり，

$$b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$$

$\alpha=1+\sqrt{2}$，$\beta=1-\sqrt{2}$ とおくと，$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n)$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$b_{n+1}b_{n-1}-{b_n}^2=\frac{1}{8}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-\frac{1}{8}(\alpha^n-\beta^n)^2$$
$$=\frac{1}{8}\{(\alpha^{2n}-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\beta^{2n})-(\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n})\}$$
$$=-\frac{1}{8}(\alpha^{n+1}\beta^{n-1}+\alpha^{n-1}\beta^{n+1}-2\alpha^n\beta^n)=-\frac{1}{8}\alpha^{n-1}\beta^{n-1}(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)$$
$$=-\frac{1}{8}(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha-\beta)^2=-\frac{1}{8}(1-2)^{n-1}(2\sqrt{2})^2=-(-1)^{n-1}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots③$$

(4)　$pb_6-qb_5=1\ (0\leqq p\leqq 100,\ 0\leqq q\leqq 100)\cdots\cdots$④を満たす整数$(p,\ q)$に対して，

③に $n=5$ を代入すると $b_6b_4-{b_5}^2=(-1)^5$ となり，$b_4=12$，$b_5=29$ から，

$$12b_6-29b_5=-1\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤から，$(p+12)b_6-(q+29)b_5=0$ となり，$b_6=70$ から，

$$70(p+12)-29(q+29)=0,\ 70(p+12)=29(q+29)$$

70 と 29 は互いに素なので，l を整数として，$p+12=29l$，$q+29=70l$ と表せ，

$$(p,\ q)=(29l-12,\ 70l-29)$$

$0\leqq p\leqq 100$，$0\leqq q\leqq 100$ から $l=1$ となり，$(p,\ q)=(17,\ 41)$ である。

［解 説］

漸化式が題材の有名問題です。(4)は互除法を利用して普通に解いても構いませんが, ここは③の利用を考えるのがポイントでしょう。