1

解答解説のページへ

a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y=f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$q>0$ とする。

(1) p, q の値を a を用いて表せ。また，$p>q$ であることを示せ。

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3) (2)の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a)　$x > \dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$　　　(b)　$x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式 $x+1 > 2\log_t(x+1)$ を示せ。

(2)　$n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば，$n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1)　p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ。また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2)　$p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3)　$p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4)　$p_n=r_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,\ -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0,\ -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

(3) (2)の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が(2)の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，$f(x) = \dfrac{\log(2x-3)}{x}$ とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること，および，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1)　$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を調べ，$y = f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2)の α は用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4)　$2 \leqq m < n$ を満たす整数 m, n の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*)\quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2+y^2=1$ および円板 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 P(0, 0, 1) を頂点とする円錐を K とする。A(0, -1, 0)，B(0, 1, 0) とする。xyz 空間内の平面 $H: z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 Q$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

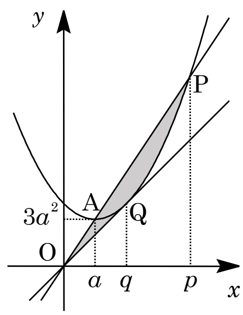
(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta+h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2}=u$ とおく置換積分を用いてもよい。

1

問題のページへ



(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=x^2-2ax+4a^2=(x-a)^2+3a^2$ に対して，放物線 $C: y=f(x)$ の頂点 A は $\mathrm{A}(a,\ 3a^2)$ となり，これより直線 OA の方程式は，$y=3ax$ である。

ここで，C と OA の交点は，$x^2-2ax+4a^2=3ax$ より，

$$x^2-5ax+4a^2=0,\ (x-a)(x-4a)=0$$

$x\neq a$ の解は $x=4a$ より，$p=4a$ である。

また，$f'(x)=2x-2a$ より，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線の方程式は，$y-(q^2-2aq+4a^2)=(2q-2a)(x-q)$ となり，原点を通ることから，

$$-(q^2-2aq+4a^2)=(2q-2a)(-q),\ q^2-4a^2=0,\ (q-2a)(q+2a)=0$$

$q>0$ から，$q=2a$ である。

そして，$p-q=4a-2a=2a>0$ から，$p>q$ となる。

(2)　(1)から，$\mathrm{P}(4a,\ 12a^2)$，$\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ となり，右上図の網点部の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 12a^2-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 4a^2-\int_{2a}^{4a}(x^2-2ax+4a^2)\,dx$$

$$=24a^3-4a^3-\left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+4a^2x\right]_{2a}^{4a}=20a^3-\left(\frac{56}{3}a^3-12a^3+8a^3\right)$$

$$=20a^3-\frac{44}{3}a^3=\frac{16}{3}a^3$$

(3)　$S=\frac{2}{3}$ のとき，$\frac{16}{3}a^3=\frac{2}{3}$ から $a^3=\frac{1}{8}$ となり，$a=\frac{1}{2}$ である。

［解 説］

放物線を題材とした穏やかな面積計算の問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　$t>1$ のとき，条件(b)から $x \geqq 2\log_t x$ なので，両辺に 1 を加えて，

$$x+1 \geqq 2\log_t x+1 = 2\log_t x+\log_t t = \log_t tx^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

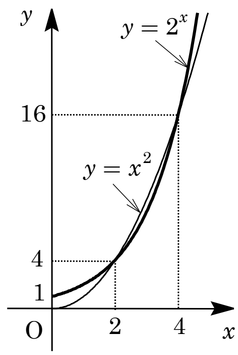
条件(a)より，$\sqrt{t}x-x>1$ から $\sqrt{t}x>x+1$ となり，$tx^2>(x+1)^2$

$$\log_t tx^2 > \log_t(x+1)^2 = 2\log_t(x+1) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$x+1>2\log_t(x+1)$

(2) 正の整数 n に対し，$n \leqq 2\log_2 n$ から $\log_2 2^n \leqq \log_2 n^2$ となり，

$$2^n \leqq n^2 \cdots\cdots\cdots ③$$



さて，$n=1$ のとき，$2^1>1^2$ より③は成立しない。

また，$n=2$, 3, 4 のとき，$2^2=2^2$，$2^3<3^2$，$2^4=4^2$ より③は成立する。

さらに，$n=5$ のとき，$2^5>5^2$ より③は成立しない。

以下，$n \geqq 5$ のとき，$2^n>n^2$ であることを証明する。

その準備のために，(1)において $t=2$ とおくと，

$$x>\frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ かつ } x \geqq 2\log_2 x \;\Rightarrow\; x+1>2\log_2(x+1)$$

正の実数 x を正の整数 n に置き換えて変形すると，

$$n>\sqrt{2}+1 \text{ かつ } 2^n \geqq n^2 \;\Rightarrow\; 2^{n+1}>(n+1)^2$$

すると，帰納的に，$n \geqq 5$ のとき $2^n>n^2$ であり，③は成立しない。

以上より，$n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n は，$n=2$, 3, 4 である。

［解　説］

対数関数と数列の融合問題です。(2)は③の形にすると，ときどき見かける問題になります。そして，(1)の不等式の意味も判明します。

3　　問題のページへ

A, B のカードを抜きだす確率がそれぞれ$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$のとき，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字$(n \geqq 2)$の文字列を作る。そして，作った文字列に AAA および BB の並びのない可のとき，右端の 2 文字が AA である確率をp_n，右端の 2 文字が BA である確率をq_n，右端の文字が B である確率をr_nとおく。

(1)　2 文字を並べたとき，AA である確率p_2は$p_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，BA である確率$q_2$は$q_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$である。また，右端の文字が B であるのは，BB が不可なので AB となり，その確率r_2は$r_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$である。

さて，可である n 文字の文字列から，可である$n+1$文字の文字列を作るには，

(i)　n 文字の右端の 2 文字が AA のとき

B を加え$n+1$文字の右端が AAB となるとき，その確率は$\frac{1}{3}p_n$である。

(ii)　n 文字の右端の 2 文字が BA のとき

(ii-i)　A を加え$n+1$文字の右端が BAA となるとき，その確率は$\frac{2}{3}q_n$である。

(ii-ii)　B を加え$n+1$文字の右端が BAB となるとき，その確率は$\frac{1}{3}q_n$である。

(iii)　n 文字の右端の 2 文字が AB のとき

A を加え$n+1$文字の右端が ABA となるとき，その確率は$\frac{2}{3}r_n$である。

(i)～(iii)より，$n+1$文字の右端が AA, BA, AB である確率p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1}は，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}r_n,\quad r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$$

(2)　$p_{n+1}+2q_{n+1}+2r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+2\cdot\frac{2}{3}r_n+2\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right)=\frac{2}{3}(p_n+2q_n+2r_n)$より，

$$p_n+2q_n+2r_n=(p_2+2q_2+2r_2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\left(\frac{4}{9}+2\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$
$$=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

(3)　(2)と同様にすると，

$$p_{n+1}+iq_{n+1}-(1+i)r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{2}{3}ir_n-(1+i)\left(\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\right)$$
$$=-\frac{1}{3}(1+i)p_n+\frac{1}{3}(1-i)q_n+\frac{2}{3}ir_n=-\frac{1}{3}(1+i)\left(p_n-\frac{1-i}{1+i}q_n-\frac{2i}{1+i}r_n\right)$$
$$=-\frac{1+i}{3}\{p_n+iq_n-(1+i)r_n\}$$

これより，$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\{p_2+iq_2-(1+i)r_2\}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$となり，

$$p_n+iq_n-(1+i)r_n=\left\{\frac{4}{9}+\frac{2}{9}i-\frac{2}{9}(1+i)\right\}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}=\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$$

(4)　(3)から，$(p_n - r_n) + i(q_n - r_n) = \frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ となり，$p_n = r_n$ を満たすとき，$\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ は実部が 0 になる。

ここで，$-\frac{1+i}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$から，

$$\frac{2}{9}\left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{9}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}\left(\cos\frac{n-2}{4}\pi + i\sin\frac{n-2}{4}\pi\right)$$

すると，$\cos\frac{n-2}{4}\pi = 0$ から，k を整数として $\frac{n-2}{4}\pi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ となり，

$$n = 8k+4,\ \ n = 8k$$

したがって，n は 4 の倍数である。

［解　説］

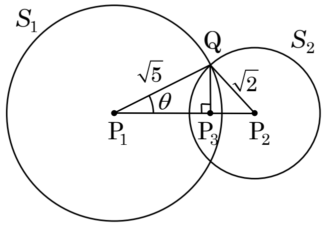
確率と漸化式の問題です。(1)の漸化式を利用すると，(2)と(3)の一般項が導けます。ただ，(4)は(2)の結果が必要というわけではありませんでした。

4

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P_1}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{P_2}(5,\ 0,\ -1)$に対して，$\mathrm{P_1P_2}=\sqrt{(5-3)^2+1^2+(-1-1)^2}=3$

(2)　(1)から，$\sqrt{5}-\sqrt{2}<\mathrm{P_1P_2}<\sqrt{5}+\sqrt{2}$ となり，球面S_1と球面S_2は交わる。



さて，S_1とS_2の交わりの円 C 上の点 Q に対して，$\angle\mathrm{QP_1P_2}=\theta$とおくと，余弦定理から，

$$\cos\theta=\frac{5+3^2-2}{2\sqrt{5}\cdot3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Cの半径は$\sqrt{5}\sin\theta=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{5}}=1$となり，また$C$の中心$\mathrm{P_3}$に対して，

$$\mathrm{P_1P_3}=\sqrt{5}\cos\theta=2,\ \ \mathrm{P_2P_3}=3-2=1$$

これより，点$\mathrm{P_3}$は線分$\mathrm{P_1P_2}$を$2:1$に内分するので，その座標は，

$$x=\frac{3+10}{3}=\frac{13}{3},\ \ y=\frac{-1+0}{3}=-\frac{1}{3},\ \ z=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{P_3}\left(\dfrac{13}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$である。

(3)　Cを含む平面Hは，点$\mathrm{P_3}$を通り法線ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(2,\ 1,\ -2)$の平面である。

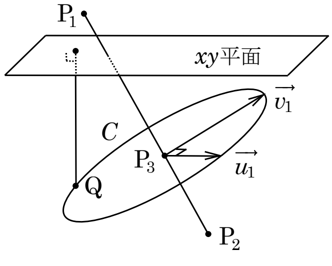
さて，xy 平面とHの両方に平行で大きさ1のベクトルを$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$a^2+b^2+c^2=1$ ……①のもとで，xy 平面に平行から$c=0$ ……②，H に平行から$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$となり，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=2a+b-2c=0$ ……③である。

①②から$a^2+b^2=1$，②③から$2a+b=0$となり，

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\ \ b=\mp\frac{2}{5}\sqrt{5}\ \ （複号同順）$$

よって，$\vec{u}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$，$\vec{u}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$である。

(4)　$\overrightarrow{u_1}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ -\dfrac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$とおき，$\overrightarrow{u_1}$に垂直で H に平行な大きさ1のベクトルを$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$とおく。



すると，$p^2+q^2+r^2=1$ ……④のもとで，$\overrightarrow{u_1}$に垂直から$\dfrac{\sqrt{5}}{5}p-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}q=0$となり$p-2q=0$ ……⑤，H に平行から$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=2p+q-2r=0$ ……⑥となる。

⑤⑥から$p=2q$，$r=\dfrac{5}{2}q$となり，④に代入すると$\dfrac{45}{4}q^2=1$から，

$$q=\pm\frac{2}{3\sqrt{5}}=\pm\frac{2}{15}\sqrt{5},\ \ p=\pm\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \ r=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\ \ （複号同順）$$

よって，$\vec{v}=\left(\dfrac{4}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{2}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$，$\vec{v}=\left(-\dfrac{4}{15}\sqrt{5},\ -\dfrac{2}{15}\sqrt{5},\ -\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$である。

そこで，$\overrightarrow{v_1}=\left(\dfrac{4}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{2}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$とおくと，円 C 上の任意の点 Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+(\cos\theta)\overrightarrow{u_1}+(\sin\theta)\overrightarrow{v_1}$$

$$=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)+(\cos\theta)\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)+(\sin\theta)\left(\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \frac{2}{15}\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

点 Q と xy 平面の距離 d は，Q の z 座標の絶対値となり，

$$d=\left|-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right|=\frac{1}{3}\left|\sqrt{5}\sin\theta-1\right|$$

ここで，θ は任意の実数をとるので，d は $\sin\theta=-1$ のとき最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{3}\left|-\sqrt{5}-1\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

このとき $\cos\theta=0$ なので，最大値を与える点 Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}-\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \frac{2}{15}\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$である。

［解 説］

質と量ともにハードな空間図形の問題です。空間内の円のパラメータ表示である⑦については，久々に登場という感じです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}\ (x \geqq 2)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{2x-3}x-\log(2x-3)}{x^2}=\frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ から，$g(x)=x^2(2x-3)f'(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$

(2)　$g'(x)=2-2\log(2x-3)-(2x-3)\cdot\dfrac{2}{2x-3}=-2\log(2x-3)$

$x \geqq 2$ において $g'(x) \leqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に減少し，

$$g(2)=4>0,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}2x\left\{1-\left(1-\frac{3}{2x}\right)\log(2x-3)\right\}=-\infty$$

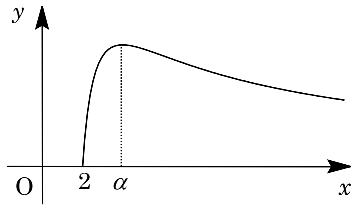
したがって，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する。

(3)　$x \geqq 2$ において，$f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号は一致するので，(2)の結果から，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\cdot\frac{2x-3}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\left(2-\frac{3}{x}\right)=0$$

これより，$y=f(x)\ (x \geqq 2)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(4)　整数 m,n が $2 \leqq m < n$ のとき，等式 $(2m-3)^n=(2n-3)^m$ ……(＊)に対して，

$$\log(2m-3)^n=\log(2n-3)^m,\ n\log(2m-3)=m\log(2n-3)$$

すると，$\dfrac{\log(2m-3)}{m}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ から，$f(m)=f(n)$ となる。

さて，$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}$，$f(4)=\dfrac{\log 5}{4}$，$f(5)=\dfrac{\log 7}{5}$，$f(6)=\dfrac{\log 9}{6}=\dfrac{\log 3}{3}$ から，

$$f(3)-f(4)=\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{4}=\frac{\log 3^4-\log 5^3}{12}=\frac{\log 81-\log 125}{12}<0$$

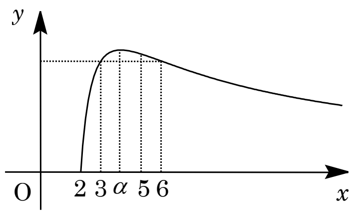
$$f(4)-f(5)=\frac{\log 5}{4}-\frac{\log 7}{5}=\frac{\log 5^5-\log 7^4}{20}=\frac{\log 3125-\log 2401}{20}>0$$

$$f(5)-f(6)=\frac{\log 7}{5}-\frac{\log 3}{3}=\frac{\log 7^3-\log 3^5}{15}=\frac{\log 343-\log 243}{15}>0$$

すると，$0=f(2)<f(3)<f(4)>f(5)>f(6)$ となり，$3<\alpha<5$ である。

したがって，$f(3)=f(6)$，$f(4)\neq f(5)$ から，等式(＊)が成立する $(m,\ n)$ は，

$$(m,\ n)=(3,\ 6)$$



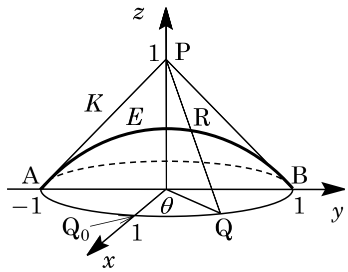
[解 説]

微分の方程式への応用問題です。頻出タイプですが，詰めの作業がやや面倒です。

6

問題のページへ

(1)　xy 平面上の $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を底面とし $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐 K の側面と，平面 $H: z=x$ の交線を E とする。$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ として $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)$ から，円錐 K の側面上の線分 PQ は，$0 \leqq t \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)=(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)$$

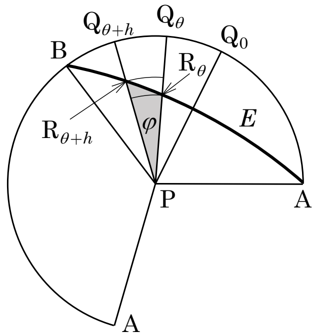
点 R は平面 H 上にあることより，$z=x$ から $1-t=t\cos\theta$ となり，

$$1=t(\cos\theta+1),\quad t=\frac{1}{\cos\theta+1}$$

すると，$\mathrm{R}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1},\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1},\ 1-\frac{1}{\cos\theta+1}\right)$ と表せるので，

$$r(\theta)=\mathrm{PR}=\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2+\left(-\frac{1}{\cos\theta+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+1}$$

(2)　円錐 K の側面を展開し，$0 \leqq \theta < \theta+h \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{Q}_\theta(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}_{\theta+h}\left(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h),\ 0\right)$ とおく。そして，線分 PQ_θ，$\mathrm{PQ}_{\theta+h}$ と E の共有点を，それぞれ R_θ，$\mathrm{R}_{\theta+h}$ とする。



すると，$\mathrm{PR}_\theta=r(\theta)$，$\mathrm{PR}_{\theta+h}=r(\theta+h)$ となり，$r(\theta)$ は単調増加するので，$r(\theta)<r(\theta+h)$ である。

また，$\overset{\frown}{\mathrm{Q}_\theta\mathrm{Q}_{\theta+h}}=1\cdot(\theta+h-\theta)=h$ であり，$\mathrm{PA}=\sqrt{2}$ から $\varphi=\angle\mathrm{Q}_\theta\mathrm{PQ}_{\theta+h}$ とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{Q}_\theta\mathrm{Q}_{\theta+h}}=\sqrt{2}\varphi$ となり，$\sqrt{2}\varphi=h$ から $\varphi=\frac{h}{\sqrt{2}}$ ……①である。

さて，曲線 E の A から R までの部分，線分 PA，線分 PR で囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおくと，$S(\theta+h)-S(\theta)$ は右上図の網点部の面積となり，半径 PR_θ で中心角 φ のおうぎ形の面積，半径 $\mathrm{PR}_{\theta+h}$ で中心角 φ のおうぎ形の面積と比べると，

$$\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\varphi \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2\varphi$$

すると，①から，$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$ ………②

(3)　②より，$h>0$ のとき，$\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \frac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$ となり，

$$\lim_{h\to+0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\ \text{………③}$$

また，$h<0$ として，$0 \leqq \theta + h < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，(2)と同様にすると，

$$\frac{(-h)\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta) - S(\theta+h) \leqq \frac{(-h)\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

各辺を $-h>0$ で割ると，$\dfrac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \dfrac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \dfrac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$ となり，

$$\lim_{h\to -0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} = \frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$ なので，(1)から，

$$S'(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{(\cos\theta+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\theta+1)^2}$$

さて，円錐 K の側面のうち，$x \geqq 0$ の部分で円 C と曲線 E により囲まれた図形の面積 T は，展開図の $\mathrm{PQ_0}$ についての対称性に着目し，さらに $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 1\cdot\pi = \pi$ から，

$$T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} S'(\theta)\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+1)^2}\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+1)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}\,d\theta$ とおき，さらに $\tan\dfrac{\theta}{2} = u$ と置き換えると，$\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = du$ となり，$\theta = 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ は $u = 0 \to 1$ に対応する。

そして，$\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 + u^2$ から，$\displaystyle I = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+u^2)\,du = \frac{1}{2}\Big[\,u + \frac{u^3}{3}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$ となり，

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

［解 説］

曲面の面積を求める問題で，展開図をもとに計算しています。誘導は付いているものの，最後の定積分の計算も含めて，かなり難攻します。