1

解答例のページへ

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行(＊)を次のように定める。

$$(*)\begin{cases}1\text{ 枚の硬貨を }1\text{ 回投げて，}\\ \bullet\ \text{表が出た場合は点 P を正の向きに }1\text{ だけ進める。}\\ \bullet\ \text{裏が出た場合は }1\text{ 個のさいころを }1\text{ 回投げ，}\\ \quad\text{奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに }1\text{ だけ進め，}\\ \quad\text{偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに }2\text{ だけ進める。}\end{cases}$$

ただし，硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{2}$，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　試行(＊)を 3 回繰り返したときに，点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

(2)　試行(＊)を 6 回繰り返したときに，点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

(3)　n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行(＊)を n 回繰り返したときに，点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

2

解答例のページへ

正の実数からなる 2 つの数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$を次のように定める。

$$x_1 = 2,\ \ y_1 = \frac{1}{2},\ \ x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2,\ \ y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を実数とする。$a_n = \log_2 x_n$，$b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき，数列$\{a_n + kb_n\}$が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。

(2)　数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四面体 OABC の体積を V とするとき，四角錐 OABDC の体積を V を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4)　四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき，線分 OD の長さを求めよ。

4

解答例のページへ

k を正の実数とする。曲線 $y=x(x-2)^2$ と放物線 $y=kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

与えられた試行(＊)より，点 P が数直線上を$+1$だけ進む確率は$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{3}{4}$，$-2$だけ進む確率は$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{4}$である。また，その回数をそれぞれ$a$回，$b$回とする。

(1) 試行(＊)を3回繰り返したとき，点Pが原点にもどっているのは，

$$a+b=3,\ \ a-2b=0$$

これより$(a,\ b)=(2,\ 1)$となり，確率は${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3\cdot 3^2}{4^3}=\dfrac{27}{64}$である。

(2) 試行(＊)を6回繰り返したとき，点Pが原点にもどっているのは，

$$a+b=6,\ \ a-2b=0$$

これより$(a,\ b)=(4,\ 2)$となり，確率は${}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{3}{4}\right)^4\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15\cdot 3^4}{4^6}=\dfrac{1215}{4096}$である。

(3) 試行(＊)をn回繰り返したときに，点Pが原点にもどっているのは，

$$a+b=n,\ \ a-2b=0$$

これより$(a,\ b)=\left(\dfrac{2}{3}n,\ \dfrac{1}{3}n\right)$となるが，$n$は3で割り切れない正の整数から，0以上の整数$a, b$は存在しない。すると，このときの確率は0である。

［コメント］

確率の基本題です。何か裏があるのではないかと疑うレベルです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x_n>0$，$y_n>0$ のとき，$x_{n+1}=(x_n)^5\cdot(y_n)^2$，$y_{n+1}=x_n\cdot(y_n)^6$ から，

$$\log_2 x_{n+1}=\log_2(x_n)^5\cdot(y_n)^2=5\log_2 x_n+2\log_2 y_n$$

$$\log_2 y_{n+1}=\log_2 x_n\cdot(y_n)^6=\log_2 x_n+6\log_2 y_n$$

ここで，$a_n=\log_2 x_n$，$b_n=\log_2 y_n$ とおくと，

$$a_{n+1}=5a_n+2b_n\cdots\cdots\cdots①,\ b_{n+1}=a_n+6b_n\cdots\cdots\cdots②$$

$x_1=2$，$y_1=\dfrac{1}{2}$ から，$a_1=\log_2 2=1$，$b_1=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ のもとで，①②より，

$$a_2=5-2=3,\ b_2=1-6=-5,\ a_3=15-10=5,\ b_3=3-30=-27$$

さて，k を実数として $c_n=a_n+kb_n$ とおくと，数列$\{c_n\}$が等比数列になるには，c_1，c_2，c_3 が等比数列になることが必要であり，

$$c_1=a_1+kb_1=1-k,\ c_2=a_2+kb_2=3-5k,\ c_3=a_3+kb_3=5-27k$$

すると，${c_2}^2=c_1c_3$ から，$(3-5k)^2=(1-k)(5-27k)$ となり，

$$2k^2-2k-4=0,\ 2(k+1)(k-2)=0$$

これより，$k=-1,\ 2$ である。

逆に，$k=-1$ のとき，①②より，

$$c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}=(5a_n+2b_n)-(a_n+6b_n)=4(a_n-b_n)=4c_n\cdots\cdots\cdots③$$

また，$k=2$ のとき，①②より，

$$c_{n+1}=a_{n+1}+2b_{n+1}=(5a_n+2b_n)+2(a_n+6b_n)=7(a_n+2b_n)=7c_n\cdots\cdots\cdots④$$

以上より，数列$\{a_n+kb_n\}$が等比数列になる k の値は，$k=-1,\ 2$ である。

(2)　(i)　$k=-1$ のとき　③から，$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot4^{n-1}=2\cdot4^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑤$

(ii)　$k=2$ のとき　④から，$a_n+2b_n=(a_1+2b_1)\cdot7^{n-1}=-7^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$2a_n+a_n=4\cdot4^{n-1}-7^{n-1}=4^n-7^{n-1}$ となり，$a_n=\dfrac{4^n-7^{n-1}}{3}$ から，

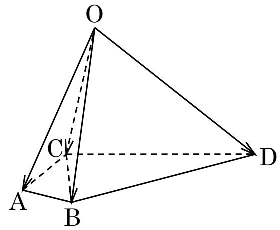
$$x_n=2^{a_n}=2^{\frac{4^n-7^{n-1}}{3}}$$

［コメント］

誘導付きで連立漸化式を解く問題です。(1)の解答例は，必要条件について丁寧に記した方がよいと思い直し，リライトしたものです。東北大の出題意図は近々発表されると思いますが，この点について触れてあるかもしれません。

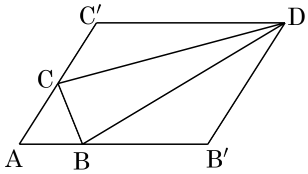
$\boxed{3}$

問題のページへ



(1) 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，点 D は $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，また△ABC の面積を S とおく。

すると，3 点 A, B, C を含む平面上において，平行四辺形 AB′DC′ の面積は $2\cdot(3\cdot 2S)=12S$ となる。



また，△BB′D の面積は $2\cdot 2S=4S$，△CC′D の面積は $1\cdot 3S=3S$ から，四角形 ABDC の面積は，

$$12S-4S-3S=5S$$

四角形 ABDC の面積は△ABC の面積の 5 倍となり，四角錐 OABDC の体積は四面体 OABC の体積 V の 5 倍，すなわち $5V$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{a})+2(\vec{c}-\vec{a})=-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}$

(3) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}})=3k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

P は BC 上にあるので $3k+2k=1$ となり，$k=\frac{1}{5}$ から $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\frac{3}{5}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{2}{5}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$

(4) 四面体 OABC が 1 辺の長さ 1 の正四面体のとき，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

(2)から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=|-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}-16\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=16+9+4-12+6-8=15$$

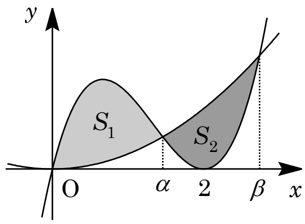
したがって，$\mathrm{OD}=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\sqrt{15}$ である。

［コメント］

空間ベクトルの基本題です。(1)は底面積比を導く設問でしたが，(2)以降は(1)と無関係なベクトルの式変形だけです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



$y=x(x-2)^2$ ……①と $y=kx^2$ $(k>0)$ ……②を連立し，

$$x(x-2)^2=kx^2,\ x\{x^2-(k+4)x+4\}=0 \cdots\cdots ③$$

ここで，$x^2-(k+4)x+4=0$ について，判別式 $D=(k+4)^2-16=k^2+8k>0$ から，その解を $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，$\alpha+\beta=k+4>0$ かつ $\alpha\beta=4>0$ より $0<\alpha<\beta$ である。これより，③の解は，$x=0$，α，β となる。

さて，曲線①と放物線②で囲まれた 2 つの部分のうち，$0\leqq x\leqq\alpha$ の部分の面積を S_1，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の部分の面積を S_2 とおくと，

$$S_1=\int_0^{\alpha}\{x(x-2)^2-kx^2\}dx,\ S_2=\int_{\alpha}^{\beta}-\{x(x-2)^2-kx^2\}dx$$

条件より，$S_1=S_2$ なので $S_1-S_2=0$ となり，

$$\int_0^{\alpha}\{x(x-2)^2-kx^2\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{x(x-2)^2-kx^2\}dx=0$$

これより，$\displaystyle\int_0^{\beta}\{x(x-2)^2-kx^2\}dx=\int_0^{\beta}\{x^3-(k+4)x^2+4x\}dx=0$ となり，

$$\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{k+4}{3}x^3+2x^2\Big]_0^{\beta}=0,\ \frac{\beta^4}{4}-\frac{k+4}{3}\beta^3+2\beta^2=0$$

$\beta>0$ から，$\dfrac{\beta^2}{4}-\dfrac{k+4}{3}\beta+2=0$，$3\beta^2-4(k+4)\beta+24=0$ ………④

ここで，$\beta^2-(k+4)\beta+4=0$ から $\beta^2=(k+4)\beta-4$ ……⑤となり，④⑤から，

$$3(k+4)\beta-12-4(k+4)\beta+24=0,\ (k+4)\beta=12 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

すると，⑤から $\beta^2=12-4=8$ となり，$\beta=2\sqrt{2}$ を⑥に代入して，

$$k=\frac{12}{\beta}-4=\frac{12}{2\sqrt{2}}-4=3\sqrt{2}-4$$

［コメント］

定積分と面積についての頻出問題です。ポイントは，1 回だけの定積分および β の次数下げという計算の工夫です。