

1

解答例のページへ

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行(*)を次のように定める。

- (*) {
- 1 枚の硬貨を 1 回投げて、
 - 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。
 - 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ、
 - 奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め、
 - 偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。

ただし、硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ ，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行(*)を 3 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (2) 試行(*)を 6 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行(*)を n 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

2[解答例のページへ](#)

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を実数とする。 $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める。 $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

4[解答例のページへ](#)

n を正の整数, a を正の実数とし, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち, その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた S_n に対し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

5

解答例のページへ

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 l と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 $(0, 0, \frac{1}{2})$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

6[解答例のページへ](#)

1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) K の対角線の長さを求めよ。
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする。また、 P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。 P と P_θ の共通部分の周の長さを l_θ とする。 θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、 l_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。

1

問題のページへ

与えられた試行(*)より、点 P が数直線上を +1 だけ進む確率は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{4}$ 、-2 だけ進む確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ である。また、その回数をそれぞれ a 回、 b 回とする。

- (1) 試行(*)を 3 回繰り返したとき、点 P が原点にもどっているのは、

$$a + b = 3, \quad a - 2b = 0$$

これより $(a, b) = (2, 1)$ となり、確率は ${}_3C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3 \cdot 3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$ である。

- (2) 試行(*)を 6 回繰り返したとき、点 P が原点にもどっているのは、

$$a + b = 6, \quad a - 2b = 0$$

これより $(a, b) = (4, 2)$ となり、確率は ${}_6C_4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15 \cdot 3^4}{4^6} = \frac{1215}{4096}$ である。

- (3) 試行(*)を n 回繰り返したときに、点 P が原点にもどっているのは、

$$a + b = n, \quad a - 2b = 0$$

これより $(a, b) = \left(\frac{2}{3}n, \frac{1}{3}n\right)$ となるが、 n は 3 で割り切れない正の整数から、0 以上の整数 a, b は存在しない。すると、このときの確率は 0 である。

[コメント]

確率の基本題です。何か裏があるのではないかと疑うレベルです。

2

問題のページへ

(1) $x_n > 0, y_n > 0$ のとき, $x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$ から,

$$\log_2 x_{n+1} = \log_2 (x_n)^5 \cdot (y_n)^2 = 5\log_2 x_n + 2\log_2 y_n$$

$$\log_2 y_{n+1} = \log_2 x_n \cdot (y_n)^6 = \log_2 x_n + 6\log_2 y_n$$

ここで, $a_n = \log_2 x_n, b_n = \log_2 y_n$ とおくと,

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, b_{n+1} = a_n + 6b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$x_1 = 2, y_1 = \frac{1}{2}$ から, $a_1 = \log_2 2 = 1, b_1 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$ のもとで, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$a_2 = 5 - 2 = 3, b_2 = 1 - 6 = -5, a_3 = 15 - 10 = 5, b_3 = 3 - 30 = -27$$

さて, k を実数として $c_n = a_n + kb_n$ とおくと, 数列 $\{c_n\}$ が等比数列になるには, c_1, c_2, c_3 が等比数列になることが必要であり,

$$c_1 = a_1 + kb_1 = 1 - k, c_2 = a_2 + kb_2 = 3 - 5k, c_3 = a_3 + kb_3 = 5 - 27k$$

すると, $c_2^2 = c_1 c_3$ から, $(3 - 5k)^2 = (1 - k)(5 - 27k)$ となり,

$$2k^2 - 2k - 4 = 0, 2(k+1)(k-2) = 0$$

これより, $k = -1, 2$ である。

逆に, $k = -1$ のとき, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$c_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = (5a_n + 2b_n) - (a_n + 6b_n) = 4(a_n - b_n) = 4c_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また, $k = 2$ のとき, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$c_{n+1} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = (5a_n + 2b_n) + 2(a_n + 6b_n) = 7(a_n + 2b_n) = 7c_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

以上より, 数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になる k の値は, $k = -1, 2$ である。

(2) (i) $k = -1$ のとき $\textcircled{3}$ から, $a_n - b_n = (a_1 - b_1) \cdot 4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{5}$

(ii) $k = 2$ のとき $\textcircled{4}$ から, $a_n + 2b_n = (a_1 + 2b_1) \cdot 7^{n-1} = -7^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{6}$

$\textcircled{5}\textcircled{6}$ より, $2a_n + a_n = 4 \cdot 4^{n-1} - 7^{n-1} = 4^n - 7^{n-1}$ となり, $a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}$ から,

$$x_n = 2^{a_n} = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$$

[コメント]

誘導付きで連立漸化式を解く問題です。(1)の解答例は, 必要条件について丁寧に記した方がよいと思い直し, リライトしたものです。東北大の出題意図は近々発表されると思いますが, この点について触れてあるかもしれません。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$ に対して,

$$f'(x) = 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x = 2x(2x^2 + 2ax + a+2)$$

ここで, $g(x) = 2x^2 + 2ax + a+2$ とおくと, $f'(x) = 2xg(x)$ となり,

(i) $g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもつとき

$$g(0) = 0 \text{ から } a = -2 \text{ となり, } f'(x) = 2x(2x^2 - 4x) = 4x^2(x-2)$$

$f'(x)$ の符号変化は $x = 2$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

(ii) $g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもたないとき

$$g(0) \neq 0 \text{ から } a \neq -2 \text{ となり, } g(x) = 0 \text{ の } D/4 = a^2 - 2(a+2) = a^2 - 2a - 4 \text{ から,}$$

(ii-i) $a^2 - 2a - 4 > 0$ ($a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$) のとき

$g(x) = 0$ は $x \neq 0$ の異なる 2 実数解をもつので, $f'(x) = 0$ は異なる 3 実数解をもつ。この実数解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) とおくと, $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x)$ は $x = \beta$ で極大値をもつ。

x	...	α	...	β	...	γ	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii-ii) $a^2 - 2a - 4 = 0$ ($a = 1 \pm \sqrt{5}$) のとき

$g(x) = 0$ は重解 $x = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) をもち, $f'(x) = 0$ の実数解は $x = 0, \alpha$ である。

$f'(x)$ の符号変化は $x = 0$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

(ii-iii) $a^2 - 2a - 4 < 0$ ($1 - \sqrt{5} < a < 1 + \sqrt{5}$) のとき

$g(x) = 0$ は実数解なしで, $g(x) > 0$ から $f'(x) = 0$ の実数解は $x = 0$ だけである。

$f'(x)$ の符号変化は $x = 0$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

(i)(ii) より, $f(x)$ が極大値をもつ条件は, $a \neq -2$ かつ「 $a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$ 」から,

$$a < -2, -2 < a < 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} < a$$

(2) (1)の(ii-i)の場合から, $x = \beta$ で極大値をもつので, 条件から $\beta = 0$ である。

$\alpha < 0 < \gamma$ から, $g(x) = 0$ の解は正と負に 1 つずつとなり, $g(0) = a + 2 < 0$ から $a < -2$ である。

[コメント]

4 次関数のグラフの増減を問う問題です。基本的な内容ですが, 場合分けについてどのような記述方法をとればよいのか迷うところがあります。

4

問題のページへ

- (1)
- n
- を正の整数,
- a
- を正の実数とし,

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

これより $f'(x) = \frac{n}{x}$, $g'(x) = nax^{n-1}$ となり, ここで曲線

$y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が $x = t$ で接するすると,

$$f(t) = g(t) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad f'(t) = g'(t) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } n \log t = at^n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } \frac{n}{t} = nat^{n-1} \text{ から } 1 = at^n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ から $n \log t = 1$ となり $t = e^{\frac{1}{n}}$, $\textcircled{4}$ に代入して $1 = ae$ から, $a = \frac{1}{e}$ である。

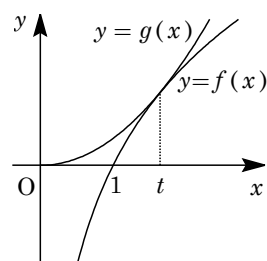
- (2) 2 曲線
- $y = f(x)$
- ,
- $y = g(x)$
- と
- x
- 軸で囲まれた部分の面積
- S_n
- は,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^t ax^n dx - \int_1^t n \log x dx = a \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^t - n [x \log x - x]_1^t \\ &= \frac{a}{n+1} t^{n+1} - n(t \log t - t + 1) = \frac{1}{(n+1)e} e^{\frac{n+1}{n}} - n \left(\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} + ne^{\frac{1}{n}} - n = \left(\frac{1}{n+1} - 1 + n \right) e^{\frac{1}{n}} - n = \frac{n^2}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - n \end{aligned}$$

- (3)
- $\frac{1}{n} = h$
- とし
- $S_n = T_h$
- とおくと,
- $n \rightarrow \infty$
- のとき
- $h \rightarrow +0$
- となり,

$$\begin{aligned} T_h &= \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{h} + 1} e^h - \frac{1}{h} = \frac{1}{h(h+1)} e^h - \frac{1}{h} = \frac{1}{h+1} \cdot \frac{e^h - 1}{h} + \frac{1}{h(h+1)} - \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{h+1} \cdot \frac{e^h - 1}{h} - \frac{1}{h+1} = \frac{1}{h+1} \left(\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) \end{aligned}$$

すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{h \rightarrow +0} T_h = 1 \cdot (1 - 1) = 0$ である。



[コメント]

微積分に極限を絡めた問題です。(3)は e の定義式にもちこむ変形をしています。

5

問題のページへ

- (1) 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる点 $P(a, b, c)$ をとる。

ここで、直線 NP と xy 平面との交点を $Q(x, y, 0)$ とすると、 t を実数として、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{NP}$ から、

$$(x, y, 0) = (0, 0, 1) + t(a, b, c-1)$$

z 成分を比べ $0 = 1 + t(c-1)$ から、 $c \neq 1$ なので、

$$t = \frac{1}{1-c}$$

これより、 $x = \frac{a}{1-c}$ 、 $y = \frac{b}{1-c}$ となり、 $Q\left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0\right)$ である。

- (2) 点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線 m と球面 S の点 N 以外の交点について、(1)から、

$$p = \frac{a}{1-c}, \quad q = \frac{b}{1-c} \quad \text{とおくと、} \quad a = (1-c)p, \quad b = (1-c)q \cdots \cdots (*)$$

ここで、 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ より、 $(1-c)^2 p^2 + (1-c)^2 q^2 + c^2 = 1$ となり、

$$(1-c)^2(p^2 + q^2) - (1+c)(1-c) = 0$$

$c \neq 1$ から $(1-c)(p^2 + q^2) - (1+c) = 0$ となり、 $(p^2 + q^2 + 1)c = p^2 + q^2 - 1$ より、

$$c = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1}, \quad 1-c = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1}$$

したがって、 m と S の点 N 以外の交点の座標は、(*)から、

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α の方程式は、

$$3x + 4y + 5\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad 6x + 8y + 10z = 5$$

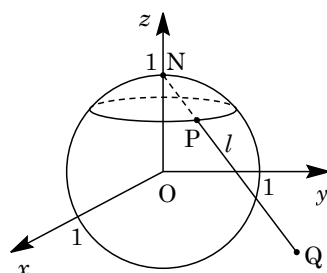
ここで、点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、(2)から、

$$6 \cdot \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} + 8 \cdot \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} + 10 \cdot \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} = 5$$

$$12p + 16q + 10(p^2 + q^2 - 1) = 5(p^2 + q^2 + 1)$$

まとめると、 $5p^2 + 5q^2 + 12p + 16q = 15$ から、 $\left(p + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(q + \frac{8}{5}\right)^2 = 7$ となり、

点 Q は xy 平面上で中心 $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right)$ 、半径 $\sqrt{7}$ の円周上を動く。



[コメント]

空間図形と軌跡の融合問題です。ポイントは、(1)から(2)、(2)から(3)という丁寧な誘導に従うことです。

6

問題のページへ

- (1) 1 辺の長さが 1 の正五角形
- $ABCDE$
- を
- K
- とすると、

$$\angle ABC = \frac{1}{5}(5 \cdot \pi - 2\pi) = \frac{3}{5}\pi$$

これより、 $\angle BAC = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{3}{5}\pi\right) = \frac{\pi}{5}$ となり、 $\alpha = \frac{\pi}{5}$ とお

くと、対角線の長さ l は、

$$l = AC = 2 \cdot AB \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

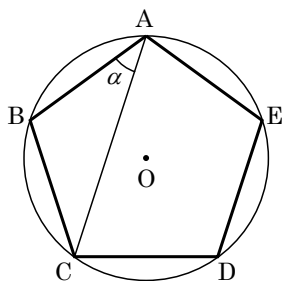
さて、 $5\alpha = \pi$ から $3\alpha = \pi - 2\alpha$ となり、

$$\sin 3\alpha = \sin(\pi - 2\alpha), \quad \sin 3\alpha = \sin 2\alpha, \quad 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$\sin \alpha > 0$ から $3 - 4\sin^2 \alpha = 2\cos \alpha$ となり、 $3 - 4(1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos \alpha$ から、

$$4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha - 1 = 0$$

$\cos \alpha > 0$ から $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ となり、 $l = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ である。



- (2)
- K
- の周で囲まれた図形を
- P
- とし、
- P
- を
- K
- の外接円の中心
- O
- のまわりに角
- θ
- (
- $0 < \theta < \frac{2}{5}\pi$
-) だけ回転して得られ

る図形を P_θ 、 P と P_θ の共通部分の周の長さを l_θ とする。

ここで、 P_θ の周である正五角形 $A'B'C'D'E'$ と K の交点を $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ とおくと、

$$l_\theta = P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{10}P_1 = 10P_1P_2 \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

さて、 $\triangle OAB$ を点 O のまわりに θ だけ回転すると、 $\triangle OA'B'$ となるので、辺 AB と辺 $A'B'$ のなす角は $\angle A'P_2P_1 = \theta$ である。

また、 $\angle P_1A'P_2 = \angle ABC = \frac{3}{5}\pi = 3\alpha$ から、

$$\angle A'P_1P_2 = \pi - \left(\frac{3}{5}\pi + \theta\right) = \frac{2}{5}\pi - \theta = 2\alpha - \theta$$

$P_1P_2 = x$ とおき、 $\triangle A'P_2P_1$ に正弦定理を適用すると、

$$\frac{A'P_1}{\sin \theta} = \frac{A'P_2}{\sin(2\alpha - \theta)} = \frac{x}{\sin 3\alpha}$$

すると、 $A'P_1 = \frac{\sin \theta}{\sin 3\alpha} x$, $A'P_2 = \frac{\sin(2\alpha - \theta)}{\sin 3\alpha} x \dots \dots \dots \textcircled{2}$

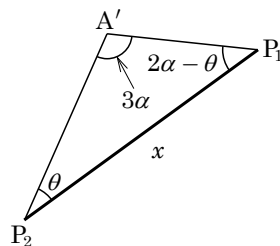
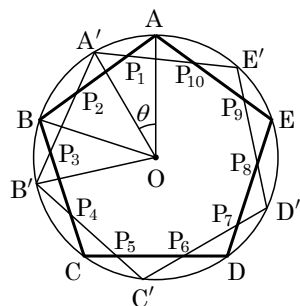
さらに、 $A'P_1 = AP_1$, $A'P_2 = BP_2$ より、

$$A'P_1 + x + A'P_2 = AP_1 + P_1P_2 + BP_2 = AB = 1 \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

②③より、 $\left\{ \frac{\sin \theta}{\sin 3\alpha} + 1 + \frac{\sin(2\alpha - \theta)}{\sin 3\alpha} \right\} x = 1$ となり、

$$\{\sin \theta + \sin(2\alpha - \theta) + \sin 3\alpha\} x = \sin 3\alpha$$

そして、 $\sin \theta + \sin(2\alpha - \theta) = 2\sin \frac{2\alpha}{2} \cos \frac{2\theta - 2\alpha}{2} = 2\sin \alpha \cos(\theta - \alpha)$ から、



$$x = P_1P_2 = \frac{\sin 3\alpha}{2\sin \alpha \cos(\theta - \alpha) + \sin 3\alpha}$$

①に代入すると、 $l_\theta = \frac{10\sin 3\alpha}{2\sin \alpha \cos(\theta - \alpha) + \sin 3\alpha}$ となる。

$0 < \theta < \frac{2}{5}\pi$ ($0 < \theta < 2\alpha$) から、 $-\alpha < \theta - \alpha < \alpha$ となり、 $\theta - \alpha = 0$ すなわち $\theta = \alpha$

のとき l_θ は最小となり、最小値 L は、 $\sin 3\alpha = \sin 2\alpha$ に注意して、

$$\begin{aligned} L &= \frac{10\sin 3\alpha}{2\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \frac{10\sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{20\sin \alpha \cos \alpha}{2\sin \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{10\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{10 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}} = \frac{10(1+\sqrt{5})}{5+\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

[コメント]

正五角形を題材とした計量問題です。(1)は有名題で、上記以外にも相似を利用する方法があります。(2)は図形の回転を絡めた難しめの内容になっており、息の長い議論が要求されます。