$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

2 つの曲線 $y = x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ で囲まれた図形を S とする。ただし，S は境界を含むものとする。

(1)　S の面積を求めよ。

(2)　直線 $y = x + k$ が，S と共通部分を持つための k の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$0<a<b$ とし, m, n を自然数とする。

$$f(m)=\log\frac{a^m+b^m}{2},\quad g(m)=\frac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}$$

とする。このとき, $f(m+n)$, $f(m)+f(n)$, $g(m+n)$, $g(m)+g(n)$ を大きさの順に並べよ。ただし, 対数は常用対数とする。

3

解答解説のページへ

2 点 A$(4,\ 0)$, B$(0,\ 2)$を考える。線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が$\angle\mathrm{OPB} = \angle\mathrm{QPA}$（O：原点）をみたしている。直線 OP の傾きを m として, Q の x 座標を m を用いて表せ。

$\boxed{4A}$

解答解説のページへ

白玉 3 個，赤玉 4 個があるとし，同じ色の玉は区別できないものとする。

(1)　上の 7 個を 2 つの区別のついた袋 A, B に分けて入れる。入れる方法は何通りあるか。ただし，いずれの袋にも 7 個のうち少なくとも 1 個は入れるものとする。

(2)　6 段の引き出しのついたタンスが 2 つあり，その中に上記の玉 7 個を分けて入れたい。ただし，どの引き出しにも 1 個しか入れないものとする。各タンスの引き出しは上から何段目か区別がつくが，2 つのタンスは区別しないものとすれば，入れる方法は何通りあるか。

4B

解答解説のページへ

実数の数列$\{a_n\}$が，$a_{3n}=a_n$，$a_{n+5}=a_n$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$，$a_1a_3a_5=8$をみたすとき,

(1)　a_1，a_5の値を求めよ。

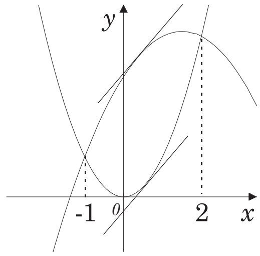
(2)　数列の和$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ ……①と $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$ ……②の交点は,

$x^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$, $x^2-x-2=0$ より, $x=-1$, 2



S の面積を S とすると,

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3\right)-x^2\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}-\frac{3}{2}(x-2)(x+1)\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(2+1)^3=\frac{27}{4}$$

(2)　①と $y=x+k$ が接する場合は, $x^2=x+k$, $x^2-x-k=0$ が重解をもつので,

$$D=1+4k=0,\quad k=-\frac{1}{4}$$

②と $y=x+k$ が接する場合は, $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3=x+k$, $x^2-x+2k-6=0$ が重解をもつので,

$$D=1-4(2k-6)=0,\quad k=\frac{25}{8}$$

求める k の範囲は, 図より $-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{25}{8}$

［解　説］

本年の文系 5 題の中では最も基本的です。このレベルの問題が第 2 問以降も続けば, 難易は昨年と同程度だったのですが, 実は全然違いました。

2

問題のページへ

$$f(m)+f(n)=\log\frac{a^m+b^m}{2}+\log\frac{a^n+b^n}{2}=\log\frac{(a^m+b^m)(a^n+b^n)}{4},$$

$f(m+n)=\log\dfrac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$ から,

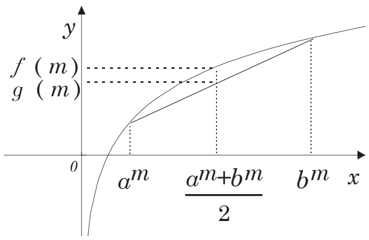
$$\begin{aligned}(a^m+b^m)(a^n+b^n)-2(a^{m+n}+b^{m+n})&=-a^ma^n-b^mb^n+a^mb^n+a^nb^m\\&=a^m(-a^n+b^n)+b^m(-b^n+a^n)\\&=(a^n-b^n)(-a^m+b^m)\\&<0\ （0<a<b より）\end{aligned}$$

$\dfrac{(a^m+b^m)(a^n+b^n)}{4}<\dfrac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$ から, $f(m)+f(n)<f(m+n)$ ………①

$$g(m)+g(n)=\frac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}+\frac{\log(a^n)+\log(b^n)}{2}=\frac{(m+n)(\log a+\log b)}{2},$$

$g(m+n)=\dfrac{\log(a^{m+n})+\log(b^{m+n})}{2}=\dfrac{(m+n)(\log a+\log b)}{2}$ から,

$g(m)+g(n)=g(m+n)$ ………②



また, 曲線 $y=\log x$ は上に凸なので, 2 点 $(a^m,\ 0)$, $(b^m,\ 0)$ を結ぶ線分の中点を考えると, $f(m)>g(m)$ となる。また $f(n)>g(n)$ から,

$f(m)+f(n)>g(m)+g(n)$ ………③

①②③より,

$f(m+n)>f(m)+f(n)>g(m)+g(n)=g(m+n)$

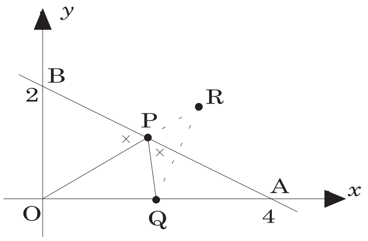
［解 説］

4 つの式の値の大小比較なので, 初めから適当に差をとっていたのでは, 運が悪いとなかなか結論に達しません。上の解では曲線 $y=\log x$ の形状に着目して, まず $f(m)>g(m)$ から, ③の式と $f(m+n)>g(m+n)$ を導きました。結局, 後者の式は不要だったのですが, 最初はこの関係をもとにして残りの式の大小関係を考えました。なお, $f(m)>g(m)$ を直接的に示すには, 相加平均と相乗平均の関係から, 不等式 $\dfrac{a^m+b^m}{2}>\sqrt{a^mb^m}=(a^mb^m)^{\frac{1}{2}}$ を利用します。

$\boxed{3}$

問題のページへ

点 Q の x 座標を k とし，Q$(k,\ 0)$ の直線 AB に関する対称点を R$(a,\ b)$ とおく。



直線 AB の方程式は $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$ ……①なので，

法線ベクトルは $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(1,\ 2)$ となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+l(1,\ 2)=(k+l,\ 2l)$$

線分 QR の中点が①上にあるので，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{k+k+l}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{2}=1,\ \ 5l=8-2k\ \cdots\cdots\cdots②$$

$\angle\mathrm{OPB}=\angle\mathrm{QPA}$ より，点 R は直線 OP : $y=mx$ 上にあるので，

$$2l=m(k+l),\ (2-m)l=mk\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$(2-m)\dfrac{8-2k}{5}=mk,\ (3m+4)k-8(2-m)=0$

$$k=\frac{8(2-m)}{3m+4}$$

［解　説］

最近，超頻出の反射の問題です。昨年も北大・文や東大・理で出ています。受験の対策をするとき，最新の入試傾向を研究したかどうかではっきり差が現れます。上の解は反射の取り扱いの常套手段である折り返しを用いたもので，この方法が最も簡明です。他には，正接の加法定理を用いることも可能ですが，計算が複雑になり，しかも点 Q が点 O に一致するときや，直線 PQ が y 軸に平行になる場合のチェックのために記述量が 2 倍程度にふくらみます。

$\boxed{4A}$

問題のページへ

(1)　袋Aに白をx個，赤をy個入れ，残りを袋Bに入れるとする。
すると，$0\leqq x\leqq 3$，$0\leqq y\leqq 4$から$(x,\ y)$の組の個数は$(3+1)\times(4+1)=20$通り。この 20 通りには，$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(3,\ 4)$の 2 通りの場合も数えられているので，求める場合の数は$20-2=18$通り。

(2)　タンスを左右に並べて，左側のタンスをA，右側のタンスをBとして区別する。
Aに白をx_1個，赤をy_1個入れ，Bに白をx_2個，赤をy_2個入れるとすると，$1\leqq x_1+y_1\leqq 6$，$1\leqq x_2+y_2\leqq 6$となることより，その入れ方は，(1)から 18 通りとなる。

(i)　$x_1=0$のとき，$y_1=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 1)$，$(x_2,\ y_2)=(3,\ 3)$では，${}_6C_0\times{}_6C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3$通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 2)$，$(x_2,\ y_2)=(3,\ 2)$では，${}_6C_0\times{}_6C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_2$通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 3)$，$(x_2,\ y_2)=(3,\ 1)$では，${}_6C_0\times{}_6C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_1$通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 4)$，$(x_2,\ y_2)=(3,\ 0)$では，${}_6C_0\times{}_6C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_0$通り

よって，${}_6C_0\times{}_6C_3\times(6\cdot 1+15\cdot 3+20\cdot 3+15\cdot 1)=2520$通り

(ii)　$x_1=1$のとき，$y_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 0)$，$(x_2,\ y_2)=(2,\ 4)$では，${}_6C_1\times{}_5C_0\times{}_6C_2\times{}_4C_4$通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$，$(x_2,\ y_2)=(2,\ 3)$では，${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_3$通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 2)$，$(x_2,\ y_2)=(2,\ 2)$では，${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2$通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 3)$，$(x_2,\ y_2)=(2,\ 1)$では，${}_6C_1\times{}_5C_3\times{}_6C_2\times{}_4C_1$通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 4)$，$(x_2,\ y_2)=(2,\ 0)$では，${}_6C_1\times{}_5C_4\times{}_6C_2\times{}_4C_0$通り

よって，${}_6C_1\times{}_6C_2\times(1\cdot 1+5\cdot 4+10\cdot 6+10\cdot 4+5\cdot 1)=11340$通り

(iii)　$x_1=2$のとき，(ii)と同じく 11340 通り

(iv)　$x_1=3$のとき，(i)と同じく 2520 通り

ここで，題意は 2 つのタンスA，Bを区別しないことなので，(i)〜(iv)より，

$$\frac{2520\times 2+11340\times 2}{2}=13860\text{通り}$$

［解　説］

4B との選択問題ですが，(2)は(1)を利用すると上のようになり，本問は非選択という選択をすべきものです。なお，東北大文系の新課程の出題範囲には数学Aの数列は入っていませんので，4A が現役生と 1 浪生用，基本的な数列の問題である 4B が 2 浪以上対象というめずらしい現象が生じています。

4B

問題のページへ

(1) $a_{3n}=a_n$ より，$a_1=a_3$，$a_2=a_6$，$a_3=a_9$，$a_4=a_{12}$，$a_5=a_{15}$ ………①

$a_{n+5}=a_n$ より，$a_1=a_6$，$a_2=a_7$，$a_3=a_8$，$a_4=a_9$，$a_5=a_{10}$ ………②

①②より，$a_1=a_2=a_3=a_4$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$ より，$4a_1+a_5=4$ ………③

$a_1a_3a_5=8$ より，$a_1{}^2a_5=8$ ………④

③④より，$a_1{}^2(-4a_1+4)=8$，$a_1{}^3-a_1{}^2+2=0$

$(a_1+1)(a_1{}^2-2a_1+2)=0$

$a_1{}^2-2a_1+2=(a_1-1)^2+1>0$ から $a_1=-1$，③より $a_5=8$

(2) 数列$\{a_n\}$は周期 5 の周期数列で，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とおくと，

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$ から, k を 0 以上の整数として,

(i) $n=5k+1$ のとき

$$S_n=4k-1=4\cdot\frac{n-1}{5}-1=\frac{4n-9}{5}$$

(ii) $n=5k+2$ のとき

$$S_n=4k-2=4\cdot\frac{n-2}{5}-2=\frac{4n-18}{5}$$

(iii) $n=5k+3$ のとき

$$S_n=4k-3=4\cdot\frac{n-3}{5}-3=\frac{4n-27}{5}$$

(iv) $n=5k+4$ のとき

$$S_n=4k-4=4\cdot\frac{n-4}{5}-4=\frac{4n-36}{5}$$

(v) $n=5k+5$ のとき

$$S_n=4k+4=4\cdot\frac{n-5}{5}+4=\frac{4n}{5}$$

［解 説］

4A との選択題ですが, (1)(2)ともわずかの計算量で完答できます。答案作成に必要なエネルギーは, 4A と比べると 30 パーセントぐらいでしょうか。