1

解答解説のページへ

三つの角 α，β，γ $(-90^\circ < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 90^\circ)$ が

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

を満たすとき，$\alpha+\beta+\gamma$ の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a を正の定数とする。$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また，そのときの $f(x)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面で x 座標, y 座標がともに 0 以上の整数となる点を非負格子点という。非負格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ にその番号 $N(\mathrm{P})$ を $N(\mathrm{P}) = 2^x(2y+1)$ で付ける。

(1)　番号が 2000 番になる非負格子点の座標を求めよ。

(2)　連続する整数 n, $n+1$, $n+2$ を番号にもつ非負格子点をそれぞれ A, B, C とする。2 以上の整数 a により $n = 2^a(2^a+1)$ となっているとき, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を a で表せ。

4

解答解説のページへ

p を 0 でない実数とし, 2 次方程式 $x^2 - px + 5p = 0$ を考える。

(1)　$x^2 - px + 5p = 0$ の解 α, β が $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。

(2)　$x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもち, その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

$\tan\alpha = a$，$\tan\beta = b$，$\tan\gamma = c$ とおく。

条件より，$a + b + c = abc$ ………(＊)

ここで $ab = 1$ とすると，(＊)より $a + b = 0$ となり，a，b は方程式 $x^2 + 1 = 0$ の 2 つの実数解となるが，$x = \pm i$ より不適である。よって，$ab \neq 1$ となる。

すると，加法定理から，$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{a+b}{1-ab}$

さらに $\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c = 1$，すなわち $ab + bc + ca = 1$ のとき，(＊)から $a + b + c = abc = k$ とおくと，a，b，c は方程式 $x^3 - kx^2 + x - k = 0$ の 3 つの実数解となるが，$x = k$，$\pm i$ より不適である。よって，$\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c \neq 1$ となる。

もう一度，加法定理を用いて，

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan\gamma}{1 - \tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{\dfrac{a+b}{1-ab} + c}{1 - \dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c} = \frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$$

(＊)より，$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 0$

ここで，$-90° < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 90°$ から，$-270° < \alpha+\beta+\gamma < 270°$

よって，$\alpha+\beta+\gamma = -180°$，$0°$，$180°$

［解 説］

問題文の等式は，相加平均と相乗平均の関係を利用するのではないかと思わせるものです。しかし，各項が正とは限らないので，まず加法定理を利用する普通の考え方で計算したところ，予想以上にうまく事が運びました。と思ったところ，分母が 0 でないという条件のチェックが必要でした。

2

問題のページへ

条件より，$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ ………①

$\int_0^1\{f(t)\}^2dt=c$ ……②とおくと，①より $f(x)=ax+c$ ………③

②③より，$c=\int_0^1(at+c)^2dt=\int_0^1(a^2t^2+2act+c^2)dt=\dfrac{a^2}{3}+ac+c^2$

よって，$c^2+(a-1)c+\dfrac{a^2}{3}=0$ ………④

④の解がただ一つしかないことより，

$$D=(a-1)^2-4\cdot\frac{a^2}{3}=0,\ \ a^2+6a-3=0$$

$a>0$ より，$a=-3+2\sqrt{3}$

このとき④の重解は，$c=-\dfrac{a-1}{2}=-\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

以上より，③から，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})$

［解 説］

本問は，常套手段だけで完答できるものです。気を付けるのは，c の値を計算するときくらいです。

3

問題のページへ

(1)　$N(\mathrm{P})=2000$ のとき，$2^x(2y+1)=2000=2^4\times5^3$

ここで，$y\geqq0$ より $2y+1$ は奇数，また $x\geqq0$ より $x=0$ では $2^x=1$，$x\geqq1$ では 2^x は偶数となる。

2000 は偶数なので，$2^x=2^4$，$2y+1=5^3$ より，$x=4$，$y=62$

(2)　条件より，$N(\mathrm{A})=n$，$N(\mathrm{B})=n+1$，$N(\mathrm{C})=n+2$

まず，$N(\mathrm{A})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)$

$a\geqq2$ より 2^a は偶数，2^a+1 は奇数より，$2^a(2^a+1)$ は偶数となるので，

$$2^x=2^a,\quad 2y+1=2^a+1$$

$x=a$，$y=2^{a-1}$ となり，$\mathrm{A}\left(a,\ 2^{a-1}\right)$

次に，$N(\mathrm{B})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)+1$

$2^a(2^a+1)+1$ は奇数より，

$$2^x=1,\quad 2y+1=2^a(2^a+1)+1$$

$x=0$，$y=2^{a-1}(2^a+1)$ となり，$\mathrm{B}\left(0,\ 2^{a-1}(2^a+1)\right)$

さらに，$N(\mathrm{C})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)+2=2\left\{2^{a-1}(2^a+1)+1\right\}$

$a\geqq2$ より 2^{a-1} は偶数，$2^{a-1}(2^a+1)+1$ は奇数，そして $2\left\{2^{a-1}(2^a+1)+1\right\}$ は偶数となるので，

$$2^x=2,\quad 2y+1=2^{a-1}(2^a+1)+1$$

$x=1$，$y=2^{a-2}(2^a+1)$ となり，$\mathrm{C}\left(1,\ 2^{a-2}(2^a+1)\right)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(a,\ 2^{a-1}-2^{a-1}(2^a+1)\right)=\left(a,\ -2^{2a-1}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(1,\ 2^{a-2}(2^a+1)-2^{a-1}(2^a+1)\right)=\left(1,\ -2^{a-2}(2^a+1)\right)$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|-2^{2a-1}+a\cdot2^{a-2}(2^a+1)\right|=\dfrac{1}{2}\left|(a-2)2^{2a-2}+a\cdot2^{a-2}\right|$

$a\geqq2$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}=(a-2)2^{2a-3}+a\cdot2^{a-3}$

［解　説］

本年度の名大・理の第 4 問と，形式的にはかなり差があるものの，内容的に非常によく似ています。考え方はまったく同じと言っても差し支えないほどです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$x^2-px+5p=0$ の解が α，β より，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=5p$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-10p$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-15p^2$$

すると，
$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\\&=(p^2-10p)(p^3-15p^2)-25p^3\\&=p^5-25p^4+125p^3\end{aligned}$$

条件より，$\alpha^5+\beta^5=p^5$ なので，$25p^4-125p^3=0$

$p\neq0$ より，$p=5$

(2)　$x^2-px+5p=0$ が虚数解をもつので，

$$D=p^2-20p<0,\ \ 0<p<20\cdots\cdots\cdots①$$

このとき，虚数解を α，$\overline{\alpha}$ とすると，$\alpha+\overline{\alpha}=p$，$\alpha\overline{\alpha}=5p$

条件より，α^5 が実数なので，$\alpha^5=\overline{\alpha}^5$

$$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^4+\alpha^3\overline{\alpha}+\alpha^2\overline{\alpha}^2+\alpha\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4)=0$$

α は虚数なので $\alpha\neq\overline{\alpha}$ から，$\alpha^4+\alpha^3\overline{\alpha}+\alpha^2\overline{\alpha}^2+\alpha\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4=0$

$$\alpha^4+\overline{\alpha}^4+\alpha\overline{\alpha}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)+(\alpha\overline{\alpha})^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, (1)より $\alpha^2+\overline{\alpha}^2=p^2-10p$

$$\alpha^4+\overline{\alpha}^4=(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)^2-2\alpha^2\overline{\alpha}^2=(p^2-10p)^2-50p^2=p^4-20p^3+50p^2$$

②より，$p^4-20p^3+50p^2+5p(p^2-10p)+25p^2=0$

$$p^4-15p^3+25p^2=0$$

$p\neq0$ より，$p^2-15p+25=0$

よって，$p=\dfrac{15\pm5\sqrt5}{2}$（この値はともに①を満たす）

［解 説］

解と係数の関係を利用する問題です。(1), (2)とも頻出題です。