1

解答解説のページへ

$x>0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$$

で定める。対数は自然対数である。

(1)　導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。

(2)　$f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(3)　正の実数 $p,\ q$ について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。

2

解答解説のページへ

空間の点$(10,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 9 の球面をS_1とし，点$(0,\ 10,\ 0)$を中心とする半径 8 の球面をS_2とする。S_1とS_2に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル$(a,\ b,\ c)$ $(c \geqq 0)$をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y=x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1 \leqq a \leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

T, O, H, O, K, U, A, O, B, A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

(1) どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。

(2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i)　P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii)　P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

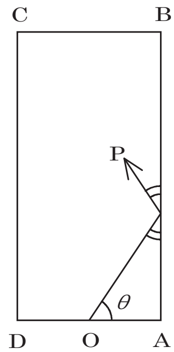
$n=3,\ 4,\ 5,\cdots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 4$ について $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻 $t=0$ に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする。ただし，P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする。初速を $v=14$ としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ として $\tan\theta$ を求めよ。またそのとき，P が頂点に到達する時刻を求めよ。



$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$を微分して，

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+(x-1)-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$

$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}+1$$

$$=\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x^2}{x^2+1}-2\log x-1$$

$$f'''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{x}$$

$$=\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f''(1)=\log 1+1-2\log 1-1=0$

$x>0$ で$f''(x)\geqq 0$となるので，$f'(x)$は単調増加である。

(2)　$f'(1)=\log 1-2\log 1+1-1=0$なので(1)より，

$0<x<1$ で$f'(x)<0$, $x>1$ で$f'(x)>0$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(1)=\log 1+0-\log 1=0$なので，$f(x)\geqq 0$

なお, 等号成立は$x=1$のときである。

(3)　(2)より，$\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}\geqq -\dfrac{1}{2}(x-1)^2+x^2\log x$

$x=\dfrac{p}{q}>0$とおくと，$\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\log\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\geqq -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(p-q)^2}{q^2}+\dfrac{p^2}{q^2}\log\dfrac{p}{q}$

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log\frac{p}{q}+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$

$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log p-p^2\log q+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$

$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2}{2}\log p^2-\frac{p^2}{2}\log q^2+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$

$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

［解 説］

(1)(2)の誘導に乗れば, (3)の不等式の証明までスムーズに進んでいきます。

2

問題のページへ

条件より，$S_1 : (x-10)^2+y^2+z^2=81$ ………①

$S_2 : x^2+(y-10)^2+z^2=64$ ………②

S_1 と S_2 に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2+(bt)^2+(ct)^2=81$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20at+19=0$

④から，$t^2-20at+19=0$

①と③が接するので，$D/4=100a^2-19=0$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2+(bt-10)^2+(ct)^2=64$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20bt+36=0$

④から，$t^2-20bt+36=0$

②と③が接するので，$D/4=100b^2-36=0$，$b=\pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100}+\dfrac{9}{25}+c^2=1$

$c\geqq 0$ なので，$c=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

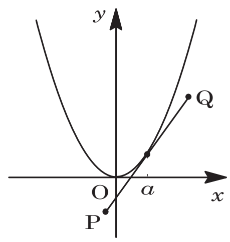
以上より，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

［解 説］

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

3

問題のページへ



$y=x^2$ より，$y'=2x$

点$(a,\ a^2)$での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①

a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき, y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので, t の値で場合分けをする。

(i)　$t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には，$y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

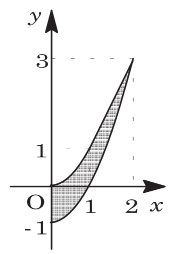
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので，

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

［解 説］

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では 2 点 P, Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

$\boxed{4}$　問題のページへ

(1)　10 文字を 1 列に並べる場合の数は$10!$通りである。また，どの 2 つの O も隣り合わないのは，まず O 以外の 7 文字を並べ，その間または両端の 8 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べるときなので，その場合の数は$7!\times{}_8P_3$通りとなる。

よって，どの 2 つの O も隣り合わない確率は，$\dfrac{7!\times{}_8P_3}{10!}=\dfrac{7}{15}$である。

(2)　O の隣り合っている状態で場合分けをする。

(i)　O が 3 つ隣り合っているとき

3 つ隣り合っている O の並べ方が$3!$通りで，この隣り合っている O を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B, A, A と合わせて並べる場合の数が$8!$通りとなるので，この場合の確率は，$\dfrac{3!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

(ii)　O が 2 つだけ隣り合っていて，それが左端または右端のとき

2 つの O が左端のときは，2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の右隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで 7 通りとなる。この隣り合っている 3 文字の右側に，もう 1 つの O も入れた他の 7 文字を並べる場合の数は$7!$通りである。2 つの O が右端のときも同じなので，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times 7\times 7!\times 2}{10!}=\dfrac{7}{60}$

(iii) O が 2 つだけ隣り合っていて，それが両端以外のとき

2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の両隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで${}_7P_2$通りとなる。この隣り合っている 4 文字を 1 文字とみなし，もう 1 つの O も入れた他の 6 文字と合わせて並べる場合の数は$7!$通りである。よって，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times{}_7P_2\times 7!}{10!}=\dfrac{7}{20}$

(iv) O が隣り合っていないとき

この場合は 2 つの A が隣り合っていて，その並べ方は$2!$通りで，この隣り合っている A を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B と合わせて並べる場合の数が$6!$通りとなる。そして，この 6 文字の間または両端の 7 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べると考えると，その場合の数は${}_7P_3$通りとなる。よって，この場合の確率は，

$\dfrac{2!\times 6!\times{}_7P_3}{10!}=\dfrac{1}{12}$

(i)～(iv)より，どこかで同じ文字が隣り合う確率は$\dfrac{1}{15}+\dfrac{7}{60}+\dfrac{7}{20}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{37}{60}$である。

［解 説］

(2)の(i)～(iii)の場合は，闇雲に計算しましたが, (1)の余事象となっていました。

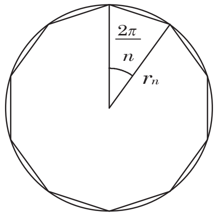
5

問題のページへ

(1)　P_{n-1} の面積は a_{n-1} なので，条件(ii)から D_{n-1} の面積も a_{n-1} となる。すると，D_{n-1} の半径は $\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}}$ となるので，D_{n-1} の周の長さは $2\pi\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}} = 2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ である。

また，P_n の面積は a_n なので，その外接円の半径を r_n とすると，

$$\frac{1}{2}r_n{}^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{a_n}{n} \cdots\cdots\cdots ①$$



さらに，P_n の周の長さは D_{n-1} の周の長さ $2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ に等しいことより，

$$2r_n\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n},\quad r_n\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n} \cdots\cdots\cdots ②$$

②より $r_n = \dfrac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$ となるので，①に代入して，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a_{n-1}}{n^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{a_n}{n}$$

よって，$\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{2n\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\pi\sin\dfrac{2\pi}{n}} = \dfrac{2n\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{2\pi\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}} = \dfrac{n}{\pi}\tan\dfrac{\pi}{n}$

(2)　$\dfrac{\pi}{n} = \theta$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ となる。

$$n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{\tan\theta}{\theta} - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right) = \pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{\theta\to 0}\pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\pi^2}{2}$

[解 説]

極限に関する標準問題です。解の方針に迷いは生じないと思います。

$\boxed{6}$

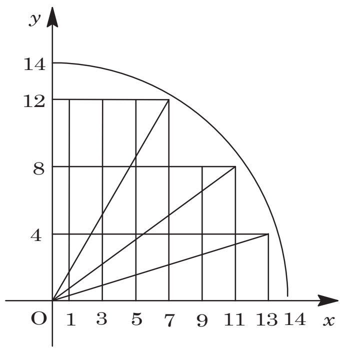
問題のページへ

時刻t_0までに点 P が進んだ道のりを L とすると，

$$L=\int_0^{t_0}14e^{-t}dt=-14\Big[e^{-t}\Big]_0^{t_0}=14(1-e^{-t_0})\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，点 P の軌跡は，反射した辺に関して長方形 ABCD を折り返していくと，直線として表せる。

すると点 O を原点とし，点A$(1,\ 0)$，点B$(1,\ 4)$として座標設定をすると，辺に関して折り返していった頂点は，$k,\ l$を自然数として，$(2k-1,\ 4l)$と表される。



ここで，最も長い時間をかけて P がどれかの頂点に到達するのは，$(*)$より L が最も大きいときである。ところが，$(*)$より $L<14$ なので，原点 O からの距離が 14 より小で，しかも 14 に最も近い頂点が求める頂点となる。

(i)　$l=1\ (y=4)$のとき

　$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は $x=13$ であり，このとき $L^2=13^2+4^2=185$となる。

(ii)　$l=2\ (y=8)$のとき

　$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は $x=11$ であり，このとき $L^2=11^2+8^2=185$となる。

(iii)　$l=3\ (y=12)$のとき

　$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数$(x=2k-1)$は $x=7$ であり，このとき $L^2=7^2+12^2=193$となる。

(i)(ii)(iii)より，$(x,\ y)=(7,\ 12)$のとき，Lは最大になり，t_0も最大となる。

このとき，$\tan\theta=\dfrac{12}{7}$であり，また$(*)$より，$\sqrt{193}=14(1-e^{-t_0})$，$e^{-t_0}=1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}$

よって，P が頂点に到達する時刻t_0は，$t_0=-\log\left(1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}\right)$となる。

［解 説］

最近，頻出の反射の問題です。反射面に関して折り返して考えるのがポイントです。97 年に東大・理で同様な問題が出題されていますので，この類題経験がものを言うのではないかと思われます。