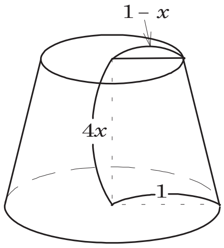
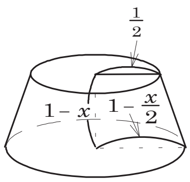
1

解答解説のページへ

図のように底面の半径 1, 上面の半径$1-x$, 高さ$4x$の直円すい台 A と, 底面の半径$1-\dfrac{x}{2}$, 上面の半径$\dfrac{1}{2}$, 高さ$1-x$の直円すい台Bがある。ただし, $0 \leqq x \leqq 1$ である。A と B の体積の和を$V(x)$とするとき, $V(x)$の最大値を求めよ。



A



B

2

解答解説のページへ

xy 平面内の領域 $-1 \leqq x \leqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

3

解答解説のページへ

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。

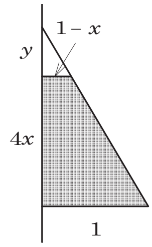
$\boxed{4}$

解答解説のページへ

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点P(α), Q(β)を考える。P(α), Q(β)を通る直線を l, 原点から l に引いた垂線と l の交点をR(w)とする。ただし, 複素数γが表す点 C をC(γ)とかく。このとき,「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は, P(α), Q(β)が中心A$\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径$\frac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。

1　　問題のページへ

まず，$0<x<1$ のとき，直円すい台 A は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_aとすると，



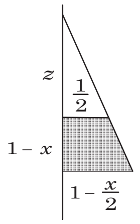
$$(1-x):1=y:(y+4x)$$

$y=(1-x)(y+4x)$より，$xy=4x-4x^2$，$y=4-4x$

このとき，
$$V_a=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot(y+4x)-\frac{1}{3}\pi(1-x)^2y$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left\{y+4x-(1-x)^2y\right\}=\frac{1}{3}\pi\left\{4-4(1-x)^3\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi(x^3-3x^2+3x)$$

$x=0$をあてはめると$V_a=0$，$x=1$をあてはめると$V_a=\frac{4}{3}\pi$となり，ともに題意に適する。

また，$0\leqq x<1$ のとき，直円すい台 B は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_bとすると，



$$\frac{1}{2}:\left(1-\frac{x}{2}\right)=z:(z+1-x)$$

$z+1-x=(2-x)z$より，$(1-x)z=1-x$，$z=1$

このとき，
$$V_b=\frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{x}{2}\right)^2(2-x)-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot1$$
$$=\frac{1}{12}\pi\left\{(2-x)^3-1\right\}=\frac{1}{12}\pi(-x^3+6x^2-12x+7)$$

$x=1$をあてはめると$V_b=0$となり適する。

よって，$0\leqq x\leqq1$ で，$V(x)=V_a+V_b=\frac{1}{12}\pi(15x^3-42x^2+36x+7)$

$$V'(x)=\frac{1}{12}\pi(45x^2-84x+36)$$
$$=\frac{1}{4}\pi(3x-2)(5x-6)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		＋	0	－	
$V(x)$		↗		↘	

右表より，$x=\frac{2}{3}$のとき$V(x)$は最大となる。

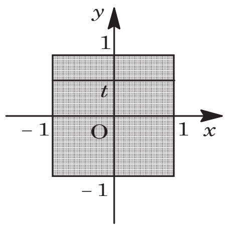
このとき，$V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}\pi\left(15\cdot\frac{8}{27}-42\cdot\frac{4}{9}+36\cdot\frac{2}{3}+7\right)=\frac{151}{108}\pi$

［解 説］

計算は面倒ですが，内容は基本的です。必要なのは忍耐力という問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。

$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので，

(i)　$-a\geqq 0$　$(a\leqq 0)$ のとき，$x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i)　$a-b\geqq 0$　$(b\leqq a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i-ii)　$a-b<0$　$(b>a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとるので，条件より，$2a-b+1>0$

(ii)　$-a<0$　$(a>0)$ のとき，$x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i)　$a+b\geqq 0$　$(b\geqq -a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとるので，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii)　$a+b<0$　$(b<-a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

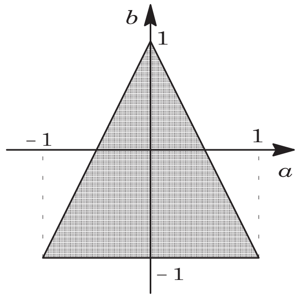
(i)(ii)をまとめると，

$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$



この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。

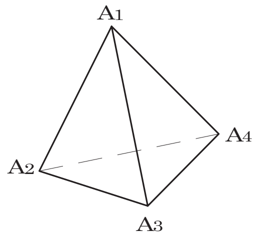
［解　説］

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$P_1(n)=a_n$，$P_2(n)=b_n$，$P_3(n)=c_n$，$P_4(n)=d_n$ とおくと，$a_0=\dfrac{1}{4}$，$b_0=\dfrac{1}{2}$，$c_0=\dfrac{1}{8}$，$d_0=\dfrac{1}{8}$となる。すると，条件より，



$$a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+c_n+d_n)\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n+d_n)\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=-\dfrac{1}{3}(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_0-b_0)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_n+b_n+2c_n+2d_n)$

ここで，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$なので，$c_n+d_n=1-a_n-b_n$より，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+b_n+2-2a_n-2b_n)=-\frac{1}{3}(a_n+b_n)+\frac{2}{3}$$

変形して，$a_{n+1}+b_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(a_n+b_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$$a_n+b_n-\frac{1}{2}=\left(a_0+b_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$a_n+b_n=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$a_n=\dfrac{1}{4}$，$b_n=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

すなわち，$P_1(n)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(n)=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

［解　説］

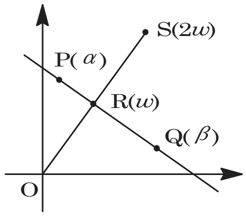
最初に考えた解を書きましたが，①と②に全確率の和が 1 を適用すると，解が簡単になります。ついつい連立風に解いてしまいました。

4

問題のページへ

$S(2w)$ とすると，条件より，

$$|\alpha| = |\alpha - 2w| \cdots\cdots\cdots ①,\ |\beta| = |\beta - 2w| \cdots\cdots\cdots ②$$



まず，$w = \alpha\beta \neq 0$ のとき，

①より，$|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$，$|\alpha| = |\alpha||1 - 2\beta|$

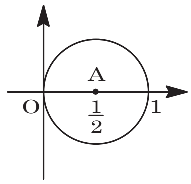
$|\alpha| \neq 0$ なので，$|1 - 2\beta| = 1$，$\left|\beta - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ ………③

②より，$|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$，$|\beta| = |\beta||1 - 2\alpha|$

$|\beta| \neq 0$ なので，$|1 - 2\alpha| = 1$，$\left|\alpha - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ ………④

③④より，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ は中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある。

逆に，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあるとき，この円周上の異なる 2 点 P, Q を結んだ直線 l は, P, Q がともに原点以外の点なので，直線 l は原点を通らない。すると，



$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \left|\beta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

これより，$|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$，$|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$

①②より，$|\alpha - 2w| = |\alpha - 2\alpha\beta|$ ………⑤，$|\beta - 2w| = |\beta - 2\alpha\beta|$ ………⑥

ここで，$\mathrm{T}(2\alpha\beta)$ とし，$w \neq \alpha\beta$ とすると，⑤⑥より 2 点 $\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ は線分 TS の垂直二等分線上にある。ところが直線 PQ は線分 OS の垂直二等分線より，T は O と一致する。すなわち，$\alpha\beta = 0$ となる。

これは $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$ に反するので，$w = \alpha\beta$ となる。

以上より，$w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。

［解 説］

複素数平面上で，直線の方程式は線分の垂直二等分線の形で表現できます。この基本を用いて点 S を設定しました。なお，後半の逆の証明の際，直線 l が原点を通るときと通らないときに場合分けをしていたのですが，前者の場合はありえないことが，図を書くとわかりました。