1

解答解説のページへ

$AB = AC$，$BC = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を$\mathrm{R}(w)$とする。ただし，複素数γが表す点 C を$\mathrm{C}(\gamma)$とかく。このとき，「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$が中心$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。

3

解答解説のページへ

$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0\leqq x\leqq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \end{cases}$$

ただし，$h=\dfrac{a}{n}$, $c>0$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2)　$g(a)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c=2,\ 1,\ \dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフを書け。

4

解答解説のページへ

座標平面上を運動する 3 点 P，Q，R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P} : x = \cos t,\quad y = \sin t \qquad \mathrm{Q} : x = 1 - vt,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R} : x = 1 - vt,\quad y = 1$$

ただし, v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2)　点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

5

解答解説のページへ

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2)　小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

(1)　$a,\ b,\ c$ を正の実数とするとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 $x,\ y,\ z$ を $a,\ b,\ c$ で表せ。

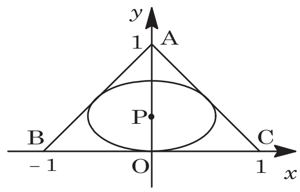
(2)　$a,\ b,\ c$ が $1 \leqq a \leqq 2,\ 1 \leqq b \leqq 2,\ 1 \leqq c \leqq 2$ の範囲を動くとき，(1)の $x,\ y,\ z$ を座標とする点 $(x,\ y,\ z)$ が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y = t$ で切った切り口の面積を求めよ。

(3)　この立体 K の体積を求めよ。

1

問題のページへ

△ABC は∠A = 90°の直角二等辺三角形で，斜辺 BC = 2 より AB = AC = $\sqrt{2}$ となる。ここで BC の中点を原点とする座標系を右図のように設定する。



楕円の中心をP(0, b) とおくと, x 軸に接することより, その方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\text{①}$$

また，直線 AC : $x+y=1$ ……②となり，楕円①と直線 AC が接するとき, y 軸に関する対称性から，楕円①は直線 AB とも接する。

さて，このとき図形を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍すると，点A(0, 1)，P(0, b)は，それぞれ点 $\left(0,\ \frac{a}{b}\right)$，(0, a) に移り，楕円①は $x^2+(y-a)^2=a^2$ ……③，直線②は $x+\frac{by}{a}=1$，すなわち $ax+by-a=0$ ……④となる。

円③と直線④が接する条件は，③の中心(0, a) と④の距離が③の半径 a に等しいことより,

$$\frac{|ba-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=a,\quad a|b-1|=a\sqrt{a^2+b^2}$$

よって，$(b-1)^2=a^2+b^2$，$b=\frac{1-a^2}{2}$ ………⑤

このとき，楕円の面積 S は，⑤より,

$$S=\pi ab=\pi a\cdot\frac{1-a^2}{2}=\frac{\pi}{2}(-a^3+a)$$

ここで, $0<a<1$ で $f(a)=-a^3+a$ とおくと,

$$f'(a)=-3a^2+1$$

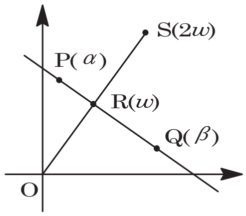
右表より，$f(a)$ は最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとり，このとき S は最大値 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ をとる。

a	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

［解 説］

楕円を円に変換して，接する条件を考えてみましたが，ここまでやるほどの問題ではありませんでした。

2　　問題のページへ



$S(2w)$とすると，条件より，

$$|\alpha| = |\alpha - 2w| \cdots\cdots\cdots①,\ \ |\beta| = |\beta - 2w| \cdots\cdots\cdots②$$

まず，$w = \alpha\beta \neq 0$のとき，

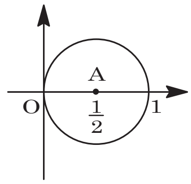
①より，$|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$，$|\alpha| = |\alpha||1 - 2\beta|$

$|\alpha| \neq 0$なので，$|1 - 2\beta| = 1$，$\left|\beta - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots③$

②より，$|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$，$|\beta| = |\beta||1 - 2\alpha|$

$|\beta| \neq 0$なので，$|1 - 2\alpha| = 1$，$\left|\alpha - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots④$

③④より，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$は中心$A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にある。



逆に，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあるとき，この円周上の異なる2点P, Qを結んだ直線lは, P, Qがともに原点以外の点なので，直線lは原点を通らない。すると，

$$\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},\ \ \left|\beta - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

これより，$|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$，$|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$

①②より，$|\alpha - 2w| = |\alpha - 2\alpha\beta| \cdots\cdots\cdots⑤$，$|\beta - 2w| = |\beta - 2\alpha\beta| \cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，$T(2\alpha\beta)$とし，$w \neq \alpha\beta$とすると，⑤⑥より2点$P(\alpha)$，$Q(\beta)$は線分TSの垂直二等分線上にある。ところが直線PQは線分OSの垂直二等分線より，TはOと一致する。すなわち，$\alpha\beta = 0$となる。

これは$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$に反するので，$w = \alpha\beta$となる。

以上より，$w = \alpha\beta$であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることである。

［解 説］

複素数平面上で，直線の方程式は線分の垂直二等分線の形で表現できます。この基本を用いて点Sを設定しました。なお，後半の逆の証明の際，直線lが原点を通るときと通らないときに場合分けをしていたのですが，前者の場合はありえないことが，図を書くとわかりました。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$f_n((k+1)h)-f_n(kh)=h\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h)$

$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}$ なので，$\dfrac{1}{p_{k+1}}-\dfrac{1}{p_k}=h\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)\cdot\dfrac{1}{p_{k+1}}$

変形して，$p_{k+1}=(1-h)p_k+h$，$p_{k+1}-1=(1-h)(p_k-1)$

$$p_k-1=(p_0-1)(1-h)^k=\left(\frac{1}{f_n(0)}-1\right)(1-h)^k=\left(\frac{1}{c}-1\right)(1-h)^k$$

よって，$p_k=1+\left(\dfrac{1}{c}-1\right)(1-h)^k$

(2)　$h=\dfrac{a}{n}$ より，$f_n(a)=f_n(nh)=\dfrac{1}{p_n}$

(1)より，$p_n=1+\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n=1+\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\left\{\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right\}^{-a}$ なので，

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{c}-1\right)e^{-a}}$$

(3)　(2)より，$g(x)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{c}-1\right)e^{-x}}$

$c=2$ のとき，$g(x)=\dfrac{2}{2-e^{-x}}$

$$g'(x)=-\frac{2e^{-x}}{(2-e^{-x})^2},\quad g''(x)=\frac{2e^{-x}(2+e^{-x})}{(2-e^{-x})^3}$$

x	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	
$g''(x)$		$+$	
$g(x)$	2	↘	1

$c=1$ のとき，$g(x)=1$

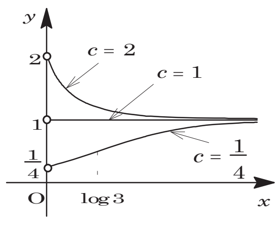
$c=\dfrac{1}{4}$ のとき，$g(x)=\dfrac{1}{1+3e^{-x}}$

$$g'(x)=\frac{3e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2}$$

$$g''(x)=\frac{3e^{-x}(3e^{-x}-1)}{(1+3e^{-x})^3}$$

x	0	$\cdots$	$\log 3$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1

以上より，$c=2$，$c=1$，$c=\dfrac{1}{4}$ のときの $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。ただし, y 軸上の点は除く。



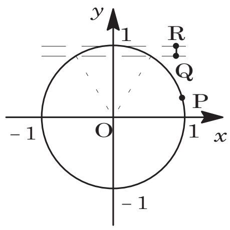
［解 説］

点の集合の上で定義された関数という設定に身構えてしまいますが, 内容的には基本事項の積み重ねでした。

4

問題のページへ

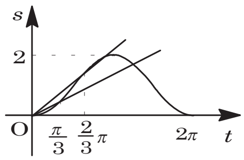
(1)　点 P は原点が中心の単位円周上の動点であり，また線分 QR は $x = 1 - vt\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq 1\right)$ と表せる。



ここで，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき，点 P と線分 QR がぶつかるのは，$\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ において，$\cos t = 1 - vt$ ……①となる t が存在するときである。

①より，$1 - \cos t = vt$ と変形して，

$$s = 1 - \cos t \cdots\cdots②,\quad s = vt \cdots\cdots③$$



そして，$\dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ において①が解をもつ条件は，②と③のグラフがこの区間で共有点をもつ条件に等しい。

そこで，③が点$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき $v = \dfrac{3}{2\pi}$ となり，③が点$\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\right)$を通るとき $v = \dfrac{9}{4\pi}$ となるので，右図から $0 \leqq t \leqq 2\pi$ で点 P と線分 QR がぶつかる条件は，$\dfrac{3}{2\pi} \leqq v \leqq \dfrac{9}{4\pi}$ となる。

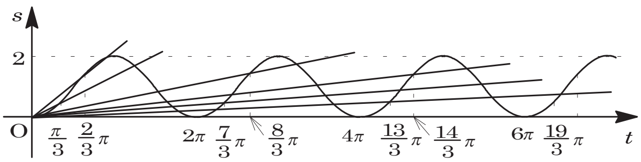
したがって，ぶつからない条件は，$0 < v < \dfrac{3}{2\pi}$，$\dfrac{9}{4\pi} < v$ である。

(2)　点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる条件は，n を 0 以上の整数として，$2n\pi + \dfrac{\pi}{3} \leqq t \leqq 2n\pi + \dfrac{2}{3}\pi$ において，①の成立する t がただ 1 つ存在することである。

このとき，点 P と線分 QR がぶつかる条件は，(1)と同様にして，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi} \leqq v \leqq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n + \frac{2}{3}\right)\pi},\quad \frac{3}{(12n+2)\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{(12n+4)\pi}$$

さて，$a_n = \dfrac{3}{(12n+2)\pi}$，$b_n = \dfrac{9}{(12n+4)\pi}$ とおき，区間 $a_n \leqq v \leqq b_n$ を I_n と表すと，求める条件は，ただ 1 つの区間 I_n だけに含まれる v の条件となる。



まず，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は減少数列であり，$n \geqq 1$ のとき，

$$b_{n+2} - a_n = \frac{9}{(12n+28)\pi} - \frac{3}{(12n+2)\pi} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{12n-11}{(3n+7)(6n+1)} > 0$$

よって，$n \geqq 1$ のとき，$a_{n+2} < a_{n+1} < a_n < b_{n+2} < b_{n+1} < b_n$ となる。これより，区間 I_{n+1} にある任意の v は区間 I_n または I_{n+2} に必ず含まれる。すなわち，$n \geqq 2$ の I_n に含まれる v はただ 1 つの区間に含まれるという条件に適さない。

すると，ただ 1 つの区間だけに含まれる v は，$n \leqq 1$ の I_n に含まれるので，$n=0,\ 1,\ 2$ のときの区間 I_n を調べると，

$$I_0 : \frac{3}{2\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{4\pi},\ \ I_1 : \frac{3}{14\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{16\pi},\ \ I_2 : \frac{3}{36\pi} \leqq v \leqq \frac{9}{28\pi}$$

これより，ただ 1 つの区間だけに含まれる v，すなわち点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる v の範囲は，$\dfrac{3}{2\pi} \leqq v \leqq \dfrac{9}{4\pi}$，$\dfrac{9}{28\pi} < v \leqq \dfrac{9}{16\pi}$ となる。

［解 説］

人工衛星が宇宙空間に漂う障害物にぶつかるという趣きの問題でした。ところが，特に(2)の解は書きにくく，時間とエネルギーを費やしてしまいます。グラフから明らかとしては乱暴すぎるので，もう少し丁寧に書こうと心掛けると，深みにはまっていくという感じです。

5

問題のページへ

(1)　和が 9 になる 2 つの数の組は，$0+9$，$1+8$，$2+7$，$3+6$，$4+5$ である。

4 けたの数で条件を満たすのは，千の位の決め方が 9 通り，その各々の場合に対して，百の位は千の位の数および千の位の数との和が 9 になる数を除いて 8 通りずつとなる。

同様に考えて，十の位の数は 6 通りずつ，一の位の数は 4 通りずつとなるので，求める 4 けたの S の要素の個数は，$9\times8\times6\times4=1728$ 個となる。

(2)　1 けたの数は 9 個で, (1)と同様に考えて, 2 けたの数は $9\times8=72$ 個, 3 けたの数は $9\times8\times6=432$ 個となる。以上，合わせて，$9+72+432=513$ 個である。

すると, (1)より 4 けたの数が 1728 個あるので, 2000 番目の数は 4 けたとなる。

そこで，小さい数から数えて，千の位が 1〜7 の数は，$7\times8\times6\times4=1344$ 個で，合わせて，$513+1344=1857$ 個となる。

さらに，千の位が 8 で，百の位が 0, 2, 3, 4, 5, 6 の数は $6\times6\times4=144$ 個で，合わせて，$1857+144=2001$ 個となる。

したがって，2000 番目は，千の位が 8，百の位が 6 の数で大きい方から 2 番目の数となり, 8695 である。

［解 説］

前問と異なり，あっさりした問題でした。(2)は見込みを立てて数えあげていく問題ですが, 1 けたの正の整数のことをうっかり忘れると，大きな被害を被ります。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

(1) 条件式の各辺の行列の積を計算すると，

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&c+a&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&yz\\0&1&z+x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

成分を比べて，$y=c+a$，$yz=ab$，$z+x=b$

まとめて，$y=c+a$ ……①，$z=\dfrac{ab}{y}=\dfrac{ab}{c+a}$ ……②，$x=b-z=\dfrac{bc}{c+a}$ ……③

(2) ①②より $yz=ab$ ……④，①③より $xy=b(y-a)$ ……⑤

④⑤より $xy=by-yz$ となり，$y>0$ より $b=x+z$ ………⑥

④⑥より，$a=\dfrac{yz}{b}=\dfrac{yz}{x+z}$ ………⑦

①⑦より，$c=y-a=y-\dfrac{yz}{x+z}=\dfrac{xy}{x+z}$ ………⑧

ここで，条件から $1\leqq a\leqq 2$, $1\leqq b\leqq 2$, $1\leqq c\leqq 2$ なので，

$$1\leqq\frac{yz}{x+z}\leqq 2 \cdots\cdots⑨,\quad 1\leqq x+z\leqq 2 \cdots\cdots⑩,\quad 1\leqq\frac{xy}{x+z}\leqq 2 \cdots\cdots⑪$$

$y=t$ とすると，①より $2\leqq t\leqq 4$ において，

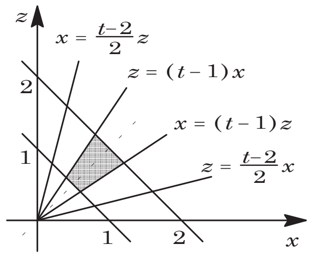
⑨より，$x+z\leqq tz\leqq 2(x+z)$ から，$\dfrac{t-2}{2}z\leqq x\leqq(t-1)z$

⑩より，$1\leqq x+z\leqq 2$

⑪より，$x+z\leqq tx\leqq 2(x+z)$ から，$\dfrac{t-2}{2}x\leqq z\leqq(t-1)x$

(i) $\dfrac{t-2}{2}\leqq\dfrac{1}{t-1}$ $(2\leqq t\leqq 3)$ のとき

平面 $y=t$ 上で，不等式⑨⑩⑪を満たす切り口は右図の網点部のようになる。



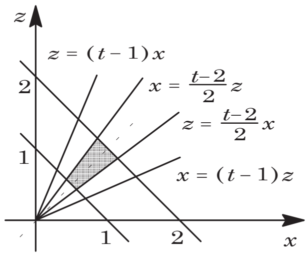
切り口の $z=x$ に関する対称性から，まず $z=x$ と $x+z=2$ の交点を求めると，$(x,\ z)=(1,\ 1)$ となる。さらに $z=(t-1)x$ と $x+z=2$ の交点を求めると，$(x,\ z)=\left(\dfrac{2}{t},\ \dfrac{2t-2}{t}\right)$ となるので，その面積 S は，

$$\frac{S}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{2t-2}{t}-\frac{2}{t}\right|=\frac{3}{8}\left|\frac{2t-4}{t}\right|=\frac{3(t-2)}{4t}$$

$$S=\frac{3(t-2)}{2t}$$

(ii)　$\dfrac{t-2}{2} \geqq \dfrac{1}{t-1}$ $(3 \leqq t \leqq 4)$ のとき

平面 $y=t$ 上で，不等式⑨⑩⑪を満たす切り口は右図の網点部のようになる。



切り口の $z=x$ に関する対称性から，まず $z=x$ と $x+z=2$ の交点を求めると，$(x,\ z)=(1,\ 1)$ となる。さらに，$z=\dfrac{t-2}{2}x$ と $x+z=2$ の交点を求めると，$(x,\ z)=\left(\dfrac{4}{t},\ \dfrac{2t-4}{t}\right)$ となるので，その面積 S は，

$$\frac{S}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{2t-4}{t}-\frac{4}{t}\right|=\frac{3}{8}\left|\frac{2t-8}{t}\right|=\frac{3(4-t)}{4t}$$

$$S=\frac{3(4-t)}{2t}$$

(3)　立体 K の体積を V とすると, (2)より,

$$V=\int_2^3\frac{3(t-2)}{2t}dt+\int_3^4\frac{3(4-t)}{2t}dt=\frac{3}{2}\int_2^3\left(1-\frac{2}{t}\right)dt+\frac{3}{2}\int_3^4\left(\frac{4}{t}-1\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\Big[t-2\log t\Big]_2^3+\frac{3}{2}\Big[4\log t-t\Big]_3^4=\frac{3}{2}\left(1-2\log\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(4\log\frac{4}{3}-1\right)$$

$$=-3\log\frac{3}{2}+6\log\frac{4}{3}=-3\log 3+3\log 2+12\log 2-6\log 3$$

$$=15\log 2-9\log 3$$

［解 説］

(2)では, a, b, c を x, y, z で表して, x, y, z の条件を求めるという確実な方法をとりました。計算が少々複雑になりますが, 力で押していけば, ゲットできます。