**1**

解答解説のページへ

半径 $r$ の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは, $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき $r$ の値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が $xy$ 平面上を動く。点 A の時刻 $t$ での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は $y$ 軸上を $y$ 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 $\mathrm{C}(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から $x$ 軸に平行な直線上を $x$ 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1) 関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2) $u$ を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。

**3**

解答解説のページへ

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を $n$ 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ $a$, $b$ とする。

(1) $n$ 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 $2^n$ 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を $X_n$ とおく。$X_{n+1}$ と $X_n$ の間の関係式を求めよ。

(2) $X_n$ を求めよ。

**4**

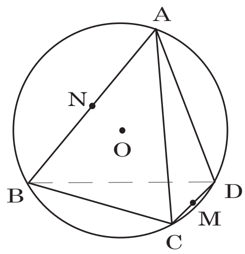
解答解説のページへ

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。

**1**

問題のページへ



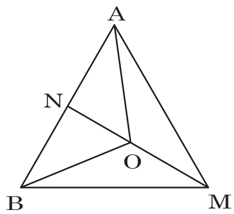

球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると, 対称性から, 中心 O は△ABM 上にある。

まず，$AM = BM = 2\sin 60° = \sqrt{3}$ より，△ABM は正三角形となる。

$$OA = OB = r\,,\ \ OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{r^2 - 1}$$

また，$MN = \sqrt{3}\sin 60° = \dfrac{3}{2}$ より,

$$ON = \frac{3}{2} - \sqrt{r^2 - 1}$$




△ONA に対して，$r^2 = \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{r^2 - 1}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2 = \frac{9}{4} - 3\sqrt{r^2 - 1} + r^2 - 1 + \frac{3}{4}$$

よって，$3\sqrt{r^2 - 1} = 2$ より，$r = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

［解 説］

第 1 問は三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの，対称性から，どの切断面を考えればよいのかは，自然に決まります。

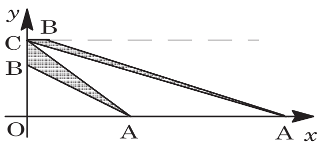


© 電送数学舎 2001

## 2

問題のページへ

(1)　$0<t\leqq 3$ のとき点 $\mathrm{B}(0,\ t)$ であり，$3\leqq t$ のとき $\mathrm{B}(t-3,\ 3)$ となる。




(i)　$0<t\leqq 3$ のとき

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)t^2=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$3\leqq t$ のとき

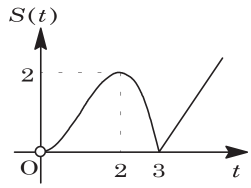
$$S(t)=\frac{1}{2}(t-3)\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3t=-\frac{3}{2}t(t-2)$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | 0 | + | 0 | − | |
| $S(t)$ | 0 | ↗ | 2 | ↘ | 0 |

$0<t\leqq 3$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。

②と合わせて $S(t)$ のグラフは右図のようになる。




(2)　②において $S(t)=2$ とすると，

$$\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}=2,\ t=\frac{13}{3}$$

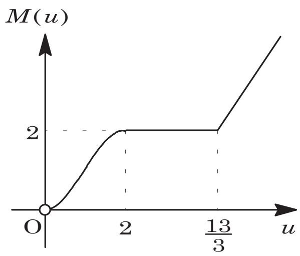
したがって，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とすると，

(i)　$0<u\leqq 2$ のとき　$M(u)=S(u)=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2$

(ii)　$2\leqq u\leqq\frac{13}{3}$ のとき　$M(u)=S(2)=2$

(iii)　$\frac{13}{3}\leqq u$ のとき　$M(u)=S(u)=\frac{3}{2}u-\frac{9}{2}$

よって，$M(u)$ のグラフは右図のようになる。




### [解　説]

気をつけるのはミスだけという基本題です。



© 電送数学舎 2001

## 3

問題のページへ

(1)　最初, 2 点 A, B はともに原点にあるので, $n$ 回の試行の後, 2 点 A, B の距離は 1 以下である。すなわち，$a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで, $n$ 回の試行の後，$a=b$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表, 裏のいずれでも $a\neq b$ となる。

また, $n$ 回の試行の後，$a=b+1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり, $n$ 回の試行の後，$a=b-1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より, $n$ 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が $X_n$，$a\neq b$ となる場合の数が $2^n-X_n$ より,

$$X_{n+1}=2^n-X_n$$

(2)　1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より，$X_{n+1}-\dfrac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\dfrac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって，$X_n=\dfrac{2}{3}(-1)^n+\dfrac{1}{3}\cdot2^n$

### ［解 説］

コインの表裏がどんな出方をしても, A, B の距離の差は, つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。


© 電送数学舎 2001

**4**

問題のページへ

まず，左端が黒石の場合，この左端の黒の碁石とその右にある碁石をすべて除くと，1 つの碁石も残らないので，条件より白石と黒石が同数となる。

次に，右端が黒石の場合，この右端の黒の碁石を除くと，残りは白石 180 個と黒石 180 個となり，白石と黒石が同数となる。

したがって，以下，両端が白石の場合について考える。

ここで，左端から $k$ 番目$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 181)$の黒石とそれより右側にある碁石をすべて取り除いたとき，どんな $k$ に対しても白黒同数とならないのは，左端が白石ということより，白石の個数が黒石の個数よりつねに大きい場合である。

すなわち，左端から $k$ 番目の黒石の左側にある白石の個数を $a_k$ とすると，

$$a_k > k-1,\ \ a_k \geqq k$$

すると，$a_{180} \geqq 180$ となるが，右端が白石なので $a_{180} \leqq 179$ である。

以上より，両端が白石の場合についても，黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる場合がある。

［解 説］

パズルのような問題です。まず，碁石の数を少なくして考え，題意の成立を確認しました。しかし，この証明をどのように記述すればよいのか，その方法にずいぶん時間を費やしてしまいました。



© 電送数学舎 2001