1

解答解説のページへ

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは, $\mathrm{AB}=\sqrt{3}$, $\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ 1 つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y)\,dy + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\,dy + \sin x + \cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

3

解答解説のページへ

実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき，$c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}$ とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

4

解答解説のページへ

複素数平面上の点a_1，a_2，…，a_n，…を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし，$i$は虚数単位である。

(1)　3点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点$b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ。

5

解答解説のページへ

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m\geqq 4$ で空のビーカーはない。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ 1 つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを 1 つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを 1 つ選ぶ。

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x<\dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x>\dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

6

解答解説のページへ

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

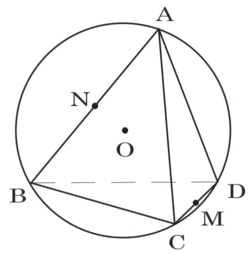
(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

1

問題のページへ

球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると，対称性から，中心 O は△ABM 上にある。

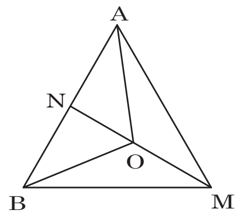


まず，$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ より，△ABM は正三角形となる。

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=r,\quad \mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OC}^2-\mathrm{CM}^2}=\sqrt{r^2-1}$$

また，$\mathrm{MN}=\sqrt{3}\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}$ より，

$$\mathrm{ON}=\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}$$



△ONA に対して，$r^2=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-1}+r^2-1+\frac{3}{4}$$

よって，$3\sqrt{r^2-1}=2$ より，$r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

［解 説］

第 1 問は三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの，対称性から，どの切断面を考えればよいのかは，自然に決まります。

2　　問題のページへ

まず，$\dfrac{a}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy=\dfrac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)f(y)\,dy$

$$=\frac{a}{2\pi}\left(\sin x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy+\cos x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy\right)$$

また，$\dfrac{b}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy=\dfrac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x\cos y+\sin x\sin y)f(y)\,dy$

$$=\frac{b}{2\pi}\left(\cos x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy+\sin x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy\right)$$

ここで，$A=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy$ ……①，$B=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy$ ……②とおくと，

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$
$$=a(A\sin x+B\cos x)+b(A\cos x+B\sin x)+\sin x+\cos x$$
$$=(aA+bB+1)\sin x+(aB+Ab+1)\cos x\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$A=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\{(aA+bB+1)\sin y\cos y+(aB+Ab+1)\cos^2 y\}\,dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{(aA+bB+1)\sin 2y+(aB+Ab+1)(1+\cos 2y)\}\,dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(aB+Ab+1)\cdot 2\pi$$

$2A=aB+Ab+1$，$(2-b)A-aB=1$ ………④

②③より，$B=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\{(aA+bB+1)\sin^2 y+(aB+Ab+1)\sin y\cos y\}\,dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{(aA+bB+1)(1-\cos 2y)+(aB+Ab+1)\sin 2y\}\,dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(aA+bB+1)\cdot 2\pi$$

$2B=aA+bB+1$，$-aA+(2-b)B=1$ ………⑤

④⑤をまとめると，$\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ………⑥

さて，$f(x)$がただ 1 つ定まるのは，$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$がただ 1 つ定まることと同値なので，⑥から$\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}^{-1}$が存在する。

$(2-b)^2-a^2\neq 0$，$a\neq\pm(2-b)$

このとき，$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix}2-b & a\\ a & 2-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{(2-b+a)(2-b-a)}\begin{pmatrix}2-b+a\\ a+2-b\end{pmatrix}=\frac{1}{2-b-a}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

③より，$f(x)=\left(\dfrac{a}{2-b-a}+\dfrac{b}{2-b-a}+1\right)\sin x+\left(\dfrac{a}{2-b-a}+\dfrac{b}{2-b-a}+1\right)\cos x$

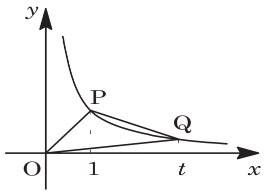
$=\dfrac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$

［解 説］

いわゆる置き換え型の積分方程式で，超頻出題です。計算の難易もちょうどよく，入試対策の練習問題として適しています

$\boxed{3}$

問題のページへ



$t>1$ に対し，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$より，

$$a(t)=\frac{1}{2}\left|\,t-\frac{1}{t}\,\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{t^2-1}{2t}$$

また，$b(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2+\displaystyle\int_1^t\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{t}=\left[\,\log x\,\right]_1^t=\log t$

よって，$c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}=\dfrac{2t\log t}{t^2-1}$

$$c'(t)=\frac{2(\log t+1)(t^2-1)-2t\log t\cdot 2t}{(t^2-1)^2}=-\frac{2(t^2\log t-t^2+\log t+1)}{(t^2-1)^2}$$

ここで，$f(t)=t^2\log t-t^2+\log t+1$ とおくと，

$$f'(t)=2t\log t+t^2\cdot\frac{1}{t}-2t+\frac{1}{t}=\frac{2t^2\log t-t^2+1}{t}$$

さらに，$g(t)=2t^2\log t-t^2+1$ とおくと，

$$g'(t)=4t\log t+2t^2\cdot\frac{1}{t}-2t=4t\log t$$

$t>1$ のとき，$g'(t)>0$ より，$g(t)>g(1)=0$

よって，$f'(t)>0$ となり，$f(t)>f(1)=0$

したがって，$c'(t)<0$ となるので，$c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少する。

［解　説］

関数の増減についての基本問題です。新しい関数をどんどん設定し，微分していけば，そのうち題意と同値な式にたどりつくというタイプです。

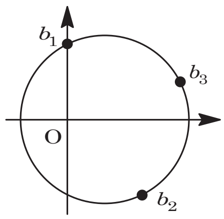
4

問題のページへ

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ………①

まず，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=i$ なので，①より，

$$b_2=1+\frac{1}{i}=1-i,\ b_3=1+\frac{1}{1-i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$



3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心を $x+yi$ とおくと，

$$|x+yi-i|=|x+yi-(1-i)|=\left|x+yi-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$|x+(y-1)i|=|(x-1)+(y+1)i|=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)i\right|$$

よって，$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ ………②

$$x^2+(y-1)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ………③}$$

②より $2x-4y=1$，③より $6x-2y=3$ なので，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ となり，円 C の中心は点 $\dfrac{1}{2}$，半径は $\left|\dfrac{1}{2}-i\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)　すべての点 b_n が円 C の周上にあることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　点 b_1 は明らかに円 C の周上にある。

(ii)　$n=k$ のとき　点 b_k が円 C の周上にあると仮定する。

$$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ………④}$$

このとき，①より $b_{k+1}=1+\dfrac{1}{b_k}$ なので，$b_k=\dfrac{1}{b_{k+1}-1}$

④に代入して，$\left|\dfrac{1}{b_{k+1}-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\left|\dfrac{3-b_{k+1}}{2(b_{k+1}-1)}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|3-b_{k+1}|}{2|b_{k+1}-1|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$|b_{k+1}-3|=\sqrt{5}|b_{k+1}-1|,\ |b_{k+1}-1|:|b_{k+1}-3|=1:\sqrt{5}$$

ここで，2 点 1，3 を結ぶ線分を $1:\sqrt{5}$ に内分する点を z_1，$1:\sqrt{5}$ に外分する点を z_2 とすると，点 b_{k+1} は 2 点 z_1，z_2 を直径の両端とする円周上にある。

$$z_1=\frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ z_2=\frac{\sqrt{5}\cdot 1-1\cdot 3}{\sqrt{5}-1}=\frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{1}{2}|z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となり，円 C に一致する。

(i)(ii)より，すべての点 b_n は円 C の周上にある。

［解　説］

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。

5

問題のページへ

(1)　最初に x リットルの水が入っているビーカーを X_1 とし，最後に 2 個のビーカーが残ったとき，そのうちの 1 つが X_1 で水の量が $x(=x_1)$ リットルのままであると仮定する。

この仮定のもとで，ビーカーが 3 個残ったとき，ビーカーを X_1，X_2，X_3 とする。ここで，X_1 の水の量は x_1 リットルであり，X_2，X_3 の水の量をそれぞれ x_2，$x_3\ (x_2 \geqq x_3)$ リットルとおくと，$x_1+x_2+x_3=1$ となる。

すると，$x_1<\dfrac{1}{3}$ より $x_2+x_3>\dfrac{2}{3}$ となり，しかも $x_2 \geqq x_3$ から $2x_2>\dfrac{2}{3}$，$x_2>\dfrac{1}{3}$ であり，このとき最後の操作を行う。

(i)　$x_2>x_1>x_3$ のとき

X_3 の水を X_1 に入れ，X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(ii)　$x_2>x_1=x_3$ のとき

X_1 は取り除かれるか，または X_3 の水を X_1 に入れ，X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(iii)　$x_2 \geqq x_3>x_1$ のとき　X_1 は取り除かれる。

以上より，ビーカー X_1 は操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えている。

(2)　(1)と同様にして，$m=4$ のとき，4 個のビーカーの水の量を $x=x_1>x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ とし，題意の操作を行った後，$x_3+x_4 \geqq x>x_2$ となるとする。

このとき，$1-x=x_2+x_3+x_4 \leqq 3x_2$ より，$x_2 \geqq \dfrac{1-x}{3}$

$$x_3+x_4=1-x-x_2 \leqq 1-x-\frac{1-x}{3}=2\cdot\frac{1-x}{3}$$

すると，$x-(x_3+x_4) \geqq x-2\cdot\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{5x-2}{3}$

ところが，$x>\dfrac{2}{5}$ より $x-(x_3+x_4)>0$ となるので，$x_3+x_4 \geqq x$ となる場合はありえない。よって，残った 3 個のビーカーで水量が最大なのは X_1 である。

同様にして，$m \geqq 5$ のとき，5 個以上のビーカーが残っており，水量が次の関係を満たすときを考える。

$$x=x_1>x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq x_{k+1}\ (k \geqq 4)$$

このとき，題意の操作を行った後，$x_k+x_{k+1} \geqq x>\dfrac{2}{5}$ となるとする。

すると，$2x_k \geqq x_k+x_{k+1}>\dfrac{2}{5}$ から $x_k>\dfrac{1}{5}$，すなわち $x_i>\dfrac{1}{5}\ (2 \leqq i \leqq k)$ より，

$$1=x+x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}>\frac{2}{5}+\frac{1}{5}(k-1)+x_{k+1}=\frac{1}{5}(k+1)+x_{k+1}$$

$k \geqq 4$ より，上式は成立しない。

よって，題意の操作をくり返したとき，残ったビーカーの水量の最大なのは，つねに X_1 である。

以上より，3 個のビーカーが残っているとき X_1 の水量は最大となり，題意の操作を行ってビーカーが 2 個になったとき，ビーカー X_1 は x リットルの水が入ったままで残る。

［解 説］

考えたとおりに書いた冗長な解ですが，あえてシェイプアップをしていません。しかし，この程度にまとめるのにも，ずいぶん時間がかかってしまいました。

6

問題のページへ

(1)　最初，2 点 A，B はともに原点にあるので，n 回の試行の後，2 点 A，B の距離は 1 以下である。すなわち，$a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで，n 回の試行の後，$a=b$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表，裏のいずれでも $a\neq b$ となる。また，n 回の試行の後，$a=b+1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり，n 回の試行の後，$a=b-1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より，n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n，$a\neq b$ となる場合の数が 2^n-X_n より，$X_{n+1}=2^n-X_n$ となる。

(2)　1 回目の試行の後，A，B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より，$X_{n+1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって，$X_n=\frac{1}{3}\cdot2^n+\frac{2}{3}(-1)^n$

(3)　n 回の試行の後，$a=b$ となる確率を p_n とすると，$p_n=\frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

すると，$a=b+1$，$a=b-1$ となる確率は，A と B の動きが対等なので，それぞれ $\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n$ となる。

ここで，n 回コインを投げたときの a の平均を E_n とおくと，$n+1$ 回目に表が出た場合はつねに A を 1 動かし，$n+1$ 回目に裏が出た場合は n 回目に $a=b-1$ であれば A を 1 動かし，$a=b$ または $a=b+1$ であれば動かさないので，

$$\begin{aligned}E_{n+1}&=\frac{1}{2}(E_n+1)+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)(E_n+1)+\left(p_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)E_n\right\}\\&=\frac{1}{2}(E_n+1)+\frac{1}{2}\left(E_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)=E_n+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_n\\&=E_n+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=E_n+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

ここで，$E_1=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times0=\frac{1}{2}$ なので，$n\geqq2$ において，

$$\begin{aligned}E_n&=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(n-1)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{9}\end{aligned}$$

（この値は $n=1$ のときも満たす）

［解　説］

コインの表裏がどんな出方をしても，A，B の距離の差は，つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。なお，(1)(2)は文理共通です。