1

解答解説のページへ

2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$, $y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような θ の範囲を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ f(-1)=-1,\ f'(-1)=0,\ g(1)=3,\ g'(1)=0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

ただし $f''(x)$，$g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ の導関数を表す。

4

解答解説のページへ

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。

1

問題のページへ

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$ ……①，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ ……②に対して，

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は，③が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ \ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ \ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より，$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$，$\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$240^\circ<\theta<300^\circ$

［解 説］

あまりにも簡単すぎて不気味です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $q(x)$ とすると，条件より，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)q(x)+a_nx+b_n$$

すると，$x^{n+2}=(x^2-x-1)xq(x)+a_nx^2+b_nx$

$$=(x^2-x-1)xq(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx$$

$$=(x^2-x-1)\{xq(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n$$

(2)　a_n，b_n がともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$ より，$a_1=b_1=1$ となり，a_1，b_1 はともに正の整数で，互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k，b_k がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ なので，a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} に 2 以上の公約数が存在するとしたとき，

$$a_k=b_{k+1},\ b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k にも 2 以上の公約数が存在することになり，a_k，b_k が互いに素であることに反する。

よって，a_{k+1}，b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素である。

［解 説］

互いに素であることの証明も，最大公約数を設定してゴチャゴチャ計算するまでもありませんでした。

3

問題のページへ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

また，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ より，$g'(x)=3px^2+2qx+r$，$g''(x)=6px+2q$

ここで，$f'(0)=g'(0)$，$f(-1)=-1$，$f'(-1)=0$ より，

$$c=r\cdots\cdots①,\ \ -a+b-c=-1\cdots\cdots②,\ \ 3a-2b+c=0\cdots\cdots③$$

$g(1)=3$，$g'(1)=0$ より，

$$p+q+r=0\cdots\cdots④,\ \ 3p+2q+r=0\cdots\cdots⑤$$

②③より，$a=c-2$，$b=a+c-1=2c-3\cdots\cdots\cdots⑥$

①④⑤より，$p=r-6=c-6$，$q=-p-r+3=-2c+9\cdots\cdots\cdots⑦$

さて，$I=\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$

$$=\int_{-1}^{0}(36a^2x^2+24abx+4b^2)dx+\int_{0}^{1}(36p^2x^2+24pqx+4q^2)dx$$

$$=\Big[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\Big]_{0}^{1}$$

$$=12a^2-12ab+4b^2+12p^2+12pq+4q^2$$

⑥⑦より，$I=12(c-2)^2-12(c-2)(2c-3)+4(2c-3)^2$

$$+12(c-6)^2+12(c-6)(-2c+9)+4(-2c+9)^2$$

$$=8c^2-48c+120=8(c-3)^2+48$$

よって，$c=3$ のとき I は最小値 48 をとる。

このとき①⑥⑦より，$a=1$，$b=3$，$p=-3$，$q=3$，$r=3$ なので，

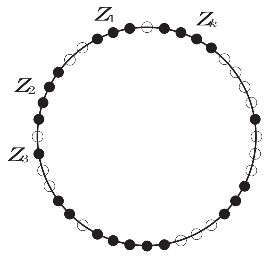
$$f(x)=x^3+3x^2+3x,\ \ g(x)=-3x^3+3x^2+3x$$

［解 説］

まず，工夫とかは考えずに普通に解きました。それでもややこしい計算はありませんでした。

$\boxed{4}$

問題のページへ



m 個の赤い点に注目して，隣り合って並んでいるものを 1 つのゾーンとして考え，順に Z_1，Z_2，…，Z_k とする。ただし, $k \leqq m$ である。

すると，これらのゾーンの内部には両端の色の異なる弧は存在しない。しかも，これらのゾーンの両側に 1 つずつだけ両端の色の異なる弧が存在する。

これより，両端の色の異なる弧の数は $2k$ 個であり，偶数となる。

［解 説］

上のような図を書いて，両端の色の異なる弧がどこにあるかを調べました。それをまとめて書くと，このような解になります。