1

解答解説のページへ

2 つの放物線 $y = 2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$， $y = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき $\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$ であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は 10 より小さいことを示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

5

解答解説のページへ

O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$, をとる。また, z 軸上 $z \geqq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

Nを正の整数とする。$2N$個の項からなる数列$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$を$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列はb_1を初項とし，b_iの次にa_i，a_iの次にb_{i+1}がくるようなものになる。また，数列$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルしたときに得られる数列において，数kが現れる位置を$f(k)$で表す。

たとえば，$N=3$のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$をシャッフルすると，$\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$である。

(1) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$を3回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1\leqq k\leqq 2N$を満たす任意の整数kに対し，$f(k)-2k$は$2N+1$で割り切れることを示せ。

(3) nを正の整数とし，$N=2^{n-1}$のときを考える。数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$を$2n$回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$にもどることを証明せよ。

1

問題のページへ

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$……①，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$……②に対して，

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は，③が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より，$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$，$\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，n を整数として，$2n\pi+\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2n\pi+\dfrac{5}{3}\pi$

［解　説］

あまりにも簡単すぎて不気味です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1) x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $q(x)$ とすると，条件より，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)q(x)+a_nx+b_n$$

すると，$x^{n+2}=(x^2-x-1)xq(x)+a_nx^2+b_nx$

$$=(x^2-x-1)xq(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx$$

$$=(x^2-x-1)\{xq(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n\,,\ \ b_{n+1}=a_n$$

(2) a_n，b_n がともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$ より，$a_1=b_1=1$ となり，a_1，b_1 はともに正の整数で，互いに素である。

(ii) $n=k$ のとき

a_k，b_k がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ なので，a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} に 2 以上の公約数が存在するとしたとき，

$$a_k=b_{k+1}\,,\ \ b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k にも 2 以上の公約数が存在することになり，a_k，b_k が互いに素であることに反する。

よって，a_{k+1}，b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素である。

［解 説］

互いに素であることの証明も，最大公約数を設定してゴチャゴチャ計算するまでもありませんでした。

3

問題のページへ

原点を中心とし，点 $A(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面 S の方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ としたとき, OP を直径とする球面の方程式は,

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y-z_0z=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②の交線である円を含む平面 L は，①－②より，

$$x_0x+y_0y+z_0z-1=0$$

すると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{|x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1|}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$，$\mathrm{AR}=\dfrac{|-z_0-1|}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}$

条件より, PQ≦AR なので，$|x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1| \leqq |-z_0-1|$

$$(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-1)^2-(-z_0-1)^2 \leqq 0$$

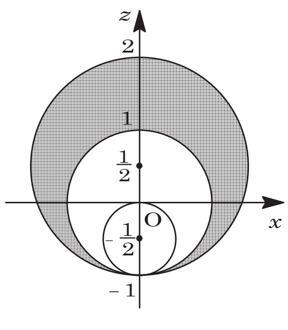
$$(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-z_0-2)(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2+z_0) \leqq 0$$

すると，点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ の動く範囲を表す不等式は

$$(x^2+y^2+z^2-z-2)(x^2+y^2+z^2+z) \leqq 0$$

$$\left\{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}\left\{x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\} \leqq 0$$

したがって，点 P の動く範囲 V は，球面 S の外側で，点 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の球から，点 $\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の球を取り除いたものである。xz 平面による断面は右図の網点部となり，これを利用すると，V の体積は,



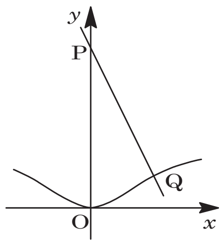
$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{19}{6}\pi<\frac{19}{6}\times 3.15=9.975<10$$

［解 説］

もうすぐ旧旧課程となってしまいますが，空間図形の方程式を利用して解きました。これが普通の解法だと思うのですが。

$\boxed{4}$

問題のページへ



$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ より，$y'=\dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)(t\neq 0)$ とおくと，Q における接線の傾きが $y'=\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$ より，点 Q における法線は，

$$y-\frac{t^2}{t^2+1}=-\frac{(t^2+1)^2}{2t}(x-t)$$

条件より，点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ を通るので，$a-\dfrac{t^2}{t^2+1}=-\dfrac{(t^2+1)^2}{2t}(-t)$

$$a=\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{(t^2+1)^2}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}+\dfrac{(t^2+1)^2}{2}$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{2t}{(t^2+1)^2}+(t^2+1)\cdot 2t=\frac{2t\{1+(t^2+1)^3\}}{(t^2+1)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

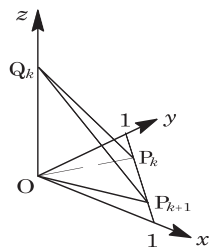
右表より, $(*)$が$t\neq 0$の解をもつ条件は$a>\dfrac{1}{2}$である。

［解　説］

難しそうな感じのする設問ですが，法線の y 切片の存在範囲を求める問題と題意を翻訳できれば，簡単です。

5

問題のページへ



$P_k\left(\frac{k}{n},\ 1-\frac{k}{n},\ 0\right)$, $P_{k+1}\left(\frac{k+1}{n},\ 1-\frac{k+1}{n},\ 0\right)$ に対して，$Q_k(0,\ 0,\ z_k)$ とおくと，条件より，$P_kQ_k=1$ なので，

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+{z_k}^2=1,\ \ {z_k}^2=2\cdot\frac{k}{n}-2\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$z_k\geqq 0$ より，$z_k=\sqrt{2\cdot\frac{k}{n}-2\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

さて，

$$\triangle OP_kP_{k+1}=\frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\left(1-\frac{k+1}{n}\right)-\frac{k+1}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}-\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-1}{n}\right|=\frac{1}{2n}$$

すると，$V_k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n}\sqrt{2\cdot\frac{k}{n}-2\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$$

ここで，$I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$ から，

$2\left(x-\frac{1}{2}\right)=\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{8}\pi$$

以上より，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{8}\pi=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$

［解　説］

区分求積法を利用して，級数の和を求める基本問題です。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

(1) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$は, 1 回シャッフルすると,

$\{5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 3,\ 8,\ 4\}$

2 回シャッフルすると, $\{7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2\}$

3 回シャッフルすると, $\{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$

(2) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N,\ N+1,\ N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルすると, $\{N+1,\ 1,\ N+2,\ 2,\ N+3,\ 3,\ \cdots,\ 2N,\ N\}$となる。

$1\leqq k\leqq N$ に対して, 数列前半$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N\}$の k 番目の数は, シャッフルすると $2k$ 番目になるので, $f(k)=2k$ である。

よって, $f(k)-2k=0$ となり, $2N+1$ で割り切れる。

$N+1\leqq k\leqq 2N$ に対して, 数列後半$\{N+1,\ N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N\}$の $k-N$ 番目の数は, シャッフルすると $2(k-N)-1$ 番目になるので, $f(k)=2(k-N)-1$ である。

よって, $f(k)-2k=-2N-1$ となり, $2N+1$ で割り切れる。

(3) (2)より, $f(k)$ と $2k$ は $2N+1$ で割ったとき余りが等しくなるので, これを次のように表す。

$$f(k)\equiv 2k \pmod{2N+1}$$

さて, $N=2^{n-1}$ のとき, 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$を 1 回シャッフルすると, $1\leqq k\leqq 2^n$ を満たす任意の k に対して,

$$f(k)\equiv 2k \pmod{2^n+1}$$

2 回シャッフルすると,

$$f(f(k))\equiv 2f(k)\equiv 2(2k)=2^2k \pmod{2^n+1}$$

3 回シャッフルすると,

$$f(f(f(k)))\equiv 2^2f(k)\equiv 2^2(2k)=2^3k \pmod{2^n+1}$$

同様にして, $2n$ 回シャッフルしたとき, $f^{2n}(k)$ と表すと,

$$f^{2n}(k)\equiv 2^{2n}k \pmod{2^n+1}$$

ここで, $2^{2n}k-k=(2^n+1)(2^n-1)k$ となるので, $2^{2n}k-k\equiv 0 \pmod{2^n+1}$

したがって, $f^{2n}(k)\equiv k \pmod{2^n+1}$ となり, $1\leqq k\leqq 2^n$ から $f^{2n}(k)=k$ である。すなわち, 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$は $2n$ 回シャッフルするともとにもどる。

［解 説］

1 から 2^n までの数に対して, 2^n+1 で割った余りに注目するところが, (3)のポイントです。(2)がその誘導となっています。