1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\quad 3x+y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

2 次方程式$x^2-4x+1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　s_nは正の整数であることを示し，s_{2003}の 1 の位の数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

4

解答解説のページへ

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1)　$X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3)　各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

1

問題のページへ

$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=2ax+b$

$f(-1)=-1$，$f(1)=1$，$f'(1)\leqq 6$ より，

$$a-b+c=-1\cdots\cdots①,\ a+b+c=1\cdots\cdots②,\ 2a+b\leqq 6\cdots\cdots③$$

①②より，$b=1$，$c=-a$

③に代入して，$2a\leqq 5$，$a\leqq\dfrac{5}{2}\cdots\cdots\cdots④$

さて，$g(x)=3x^2-1-f(x)$ とおくと，

$$g(x)=3x^2-1-(ax^2+x-a)=(3-a)x^2-x+(a-1)$$

ここで，$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x)\geqq 0$ である条件は，$g(-1)=3$，$g(1)=1$ であり，しかも④より $0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$ となることを考え合わせると，$g(x)=0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D=1-4(3-a)(a-1)\leqq 0,\ 4a^2-16a+13\leqq 0$$

よって，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ となり，④と合わせて $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

このとき，$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2dx=2\int_0^1(4a^2x^2+1)dx$

$$=2\Big[\frac{4}{3}a^2x^3+x\Big]_0^1=\frac{8}{3}a^2+2$$

すると，⑥より，$\dfrac{8}{3}\Big(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\Big)^2+2\leqq I\leqq\dfrac{8}{3}\Big(\dfrac{5}{2}\Big)^2+2$ なので，$\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}\leqq I\leqq\dfrac{56}{3}$ となる。

［解　説］

③の条件があるために，場合分けが不要となります。正確な計算力だけで片付きます。

2

問題のページへ

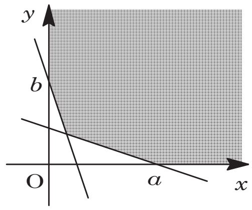
領域 $D: x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に対して，境界 $x+3y=a$ ……①，$3x+y=b$ ……②とおく。

すると，①と両軸との交点は $(a,\ 0)$ と $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ と $(0,\ b)$ である。

(i)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ b \geqq \dfrac{a}{3}$ $\left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right)$ のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

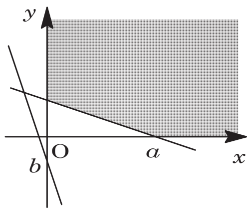
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点 $\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

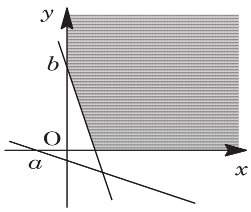
(ii)　$a \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{3} \geqq b$ $\left(a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}\right)$ のとき



右図より，点 $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

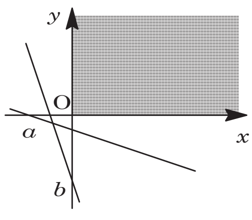
(iii)　$b \geqq 0,\ \dfrac{b}{3} \geqq a,\ b \geqq \dfrac{a}{3}$ $(b \geqq 0,\ b \geqq 3a)$ のとき



右図より，点 $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv)　$a \leqq 0,\ b \leqq 0$ のとき



右図より，原点 $(0,\ 0)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=0$$

［解　説］

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれの x 切片，y 切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab 平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

3

問題のページへ

(1)　$x^2-4x+1=0$ の解は $x=2\pm\sqrt{3}$ で，$\alpha>\beta$ から $\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2=14$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64-12=52$$

また，α，β は $x^2-4x+1=0$ の解なので，$\alpha^2-4\alpha+1=0$ となり，

$$\alpha^2=4\alpha-1,\ \alpha^n=4\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}-\beta^{n-2}$ なので，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}-s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$\alpha>\beta>0$ より，$s_n=\alpha^n+\beta^n>0$ である。また，(1)より s_1，s_2 がともに整数なので，(＊)から帰納的に s_n は整数である。すなわち，s_n は正の整数である。

さて，数列 $\{s_n\}$ の 1 の位の数を s_1 から順に並べてみると，4, 4, 2, 4, 4, 2, …と周期 3 の周期数列であることが予測できる。

以下，この予測の正しいことを，(＊)を用いて示す。

$$s_{n+3}=4s_{n+2}-s_{n+1}=4(4s_{n+1}-s_n)-s_{n+1}=15s_{n+1}-4s_n=5(3s_{n+1}-s_n)+s_n$$

ここで，s_1，s_2 はともに偶数なので，(＊)より帰納的に s_n も偶数となる。

すると，$5(3s_{n+1}-s_n)$ は 10 の倍数となり，s_{n+3} を 10 で割った余りと s_n を 10 で割った余りは等しくなる。すなわち，s_{n+3} の 1 の位の数と s_n の 1 の位の数は一致し，数列 $\{s_n\}$ の 1 の位の数は周期 3 の周期数列となる。

したがって，$2003=3\times667+2$ から，s_{2003} の 1 の位の数は s_2 の 1 の位の数と等しく，4 である。

(3)　$0<\beta<1$ なので $0<\beta^{2003}<1$ となる。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ であり，(2)より s_{2003} の 1 の位の数は 4 なので，α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数は 3 である。

［解 説］

どこかで見たような問題ですが，そっくりそのままというのは記憶になく，何か有名問題を組み合わせたような感じがします。

4

問題のページへ

(1)　17 を 1 から 6 までの数で割った余りが X_1 より，X_1 の各々の値に対する確率は右表のようになる。

X_1	0	1	2	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

次に，X_n を 1 から 6 までの数で割った余りが X_{n+1} より，$X_n=0$ のとき，どんな場合も $X_{n+1}=0$ である。

$X_n=1$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{5}{6}$ である。

$X_n=2$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\frac{2}{3}$ である。

さらに，$X_n=5$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=5$ となる確率は $\frac{1}{6}$ である。

ここで，$X_n=0$，$X_n=1$，$X_n=2$，$X_n=5$ となる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とおくと，$a_1=\frac{1}{6}$，$b_1=\frac{1}{3}$，$c_1=\frac{1}{3}$，$d_1=\frac{1}{6}$ であり，

$$a_2=a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{7}{18},\quad b_2=\frac{5}{6}b_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\frac{2}{3}c_1+\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{4},\quad d_2=\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{36}$$

よって，$X_3=0$ となる確率は，

$$a_3=a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{3}d_2=\frac{29}{54}$$

(2)　(1)と同様にすると，$d_{n+1}=\frac{1}{6}d_n$ となり，$X_n=5$ となる確率は，

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3)　(1)と同様にし, (2)の結果を用いると，$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}\left\{b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$X_n=1$ となる確率は，

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

[解 説]

(1)で一般的に考えておくと, (2)と(3)は漸化式を解くだけで済みます。