1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。
2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2-1$

このとき，積分 $I=\int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1)　$\angle \mathrm{APB}$ を求めよ。

(2)　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

3

解答解説のページへ

xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t = 1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1，s_2，s_3 を求めよ。また, $n\geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

5

解答解説のページへ

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

6

解答解説のページへ

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ より，

$$a-b+c=-1\cdots\cdots①,\quad a+b+c=1\cdots\cdots②$$

①②より，$b=1$，$c=-a$

さて，$g(x)=3x^2-1-f(x)$ とおくと，

$$g(x)=3x^2-1-(ax^2+x-a)=(3-a)x^2-x+(a-1)$$

ここで，$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x)\geqq 0$ である条件は，

(i) $3-a\leqq 0$ $(a\geqq 3)$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは，直線または上に凸の放物線であり，$g(-1)=3$，$g(1)=1$ より，$g(x)\geqq 0$ は成立する。

(ii)　$3-a>0$ $(a<3)$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x=\dfrac{1}{2(3-a)}>0$ である。

(ii-i)　$0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$ $\left(a\leqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$g(x)\geqq 0$ である条件は，$g(x)=0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D=1-4(3-a)(a-1)\leqq 0,\quad 4a^2-16a+13\leqq 0$$

よって，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ となり，$a\leqq\dfrac{5}{2}$ と合わせて $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$

(ii-ii)　$\dfrac{1}{2(3-a)}>1$ $\left(\dfrac{5}{2}<a<3\right)$

$g(-1)=3$，$g(1)=1$ より，$g(x)\geqq 0$ は成立する。

(i)(ii)より，$a\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$

このとき，$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2dx=2\int_0^1(4a^2x^2+1)dx$

$$=2\left[\frac{4}{3}a^2x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}a^2+2$$

すると，$I\geqq\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2+2=\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$ となる。

[解 説]

文系に類題がありますが，理系では条件が 1 つ少ないために場合分けが必要となります。

© 電送数学舎 2003

2

問題のページへ

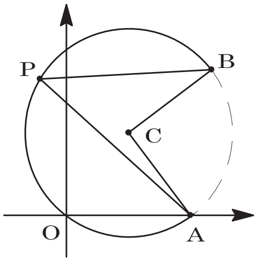
(1)　点$\mathrm{P}(z)$とし，$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$とおくと，

$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}{6\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}$$
$$=\frac{7+49i}{8t+6ti}=\frac{(7+49i)(8-6i)}{t(8+6i)(8-6i)}=\frac{7+7i}{2t}$$

$t>0$より，$\arg\dfrac{(7+7i)-z}{6-z}=\arg\dfrac{7}{2t}(1+i)=45°$

よって，$\angle\mathrm{APB}=45°$

(2)　(1)より，点Pは$\angle\mathrm{APB}$が一定より，2点A，Bを通る円周上にある。さらに，PAからPBを測った角が$45°$なので，点Pは，右図の実線部に存在する。



この円の中心を$\mathrm{C}(w)$とおくと，$\angle\mathrm{ACB}=2\angle\mathrm{APB}=90°$より，点Cを中心にAを$90°$回転するとBになるので，

$$(7+7i)-w=i(6-w)，\ (1-i)w=7+i$$
$$w=\frac{7+i}{1-i}=3+4i$$

さて，$\mathrm{OC}=|w|=5$，円の半径$\mathrm{AC}=|w-6|=|-3+4i|=5$より，線分OPの長さが最大になる点Pの位置は，OCの延長と円との交点であり，$z=2w=6+8i$の場合である。

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i，\ 14(t-3)=(6+8i)(t-7-ti)，\ (t-28)i=0$$

よって，OPが最大になるのは$t=28$のときである。

［解 説］

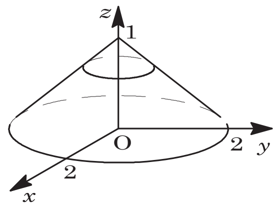
誘導に従っていくと，一見，複雑そうに見える点Pの動きがよくわかってきます。なお，計算量も適当なものです。

© 電送数学舎 2003

3

問題のページへ

(1)　円錐 A を平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口の円の半径を r とすると，



$$r:2=1-t:1,\ \ r=2(1-t)$$

よって，$z=t$ 上で，この円の方程式は，

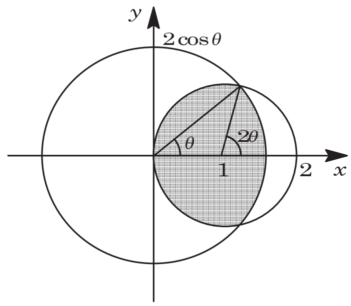
$$x^2+y^2=4(1-t)^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，円柱 B は，中心$(1,\ 0,\ 0)$で半径 1 の円を底面とし，中心軸が z 軸に平行なので，その方程式は，$z=t$ 上でも，

$$(x-1)^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②の交点は，①－②より，

$$2x=4(1-t)^2,\ \ x=2(1-t)^2$$



$t=1-\cos\theta$ とおくと $x=2\cos^2\theta$ となり，①の半径が $r=2\cos\theta$ から $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ である。

①より $y^2=4\cos^2\theta-4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$=4\cos^2\theta\sin^2\theta=\sin^2 2\theta$$

よって，$y=\pm\sin 2\theta$ となり，共通部分の面積は，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2)　$t=1-\cos\theta$ より，$\dfrac{dt}{d\theta}=\sin\theta$ となり，$t=0$ のとき $\theta=0$，$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta\sin\theta-\sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos 2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\sin 3\theta-\sin\theta)\,d\theta$

$$=-\left[\theta\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)d\theta=-\frac{10}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3\theta-\cos\theta)\,d\theta=\frac{2}{3}$$

よって，$V=-\dfrac{10}{9}-\dfrac{2}{3}+\pi\cdot 1=\pi-\dfrac{16}{9}$

［解 説］

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て，似た問題があったという記憶があり，調べてみると，それは 1994 年度の 3 番でした。

© 電送数学舎 2003

4

問題のページへ

(1)　$x^2-4x-1=0$ の解は $x=2\pm\sqrt{5}$ で，$\alpha>\beta$ から $\alpha=2+\sqrt{5}$，$\beta=2-\sqrt{5}$ となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$
$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+2=18$$
$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64+12=76$$

また，α，β は $x^2-4x-1=0$ の解なので，$\alpha^2-4\alpha-1=0$ となり，

$$\alpha^2=4\alpha+1,\ \alpha^n=4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$ なので，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}+s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$-1<\beta<0$ なので $-1<\beta^3<0$ となる。

よって，β^3 以下の最大の整数は -1 である。

(3)　(1)より s_1，s_2 がともに正の整数なので, (＊)から帰納的に s_n は正の整数である。

さて, 数列 $\{s_n\}$ の 1 の位の数を a_n とすると, (1)より $a_1=4$，$a_2=8$ である。

(＊)から s_n の 1 の位のみ計算すると，$4\times8+4=36$ から $a_3=6$，$4\times6+8=32$ から $a_4=2$，$4\times2+6=14$ から $a_5=4$，$4\times4+2=18$ から $a_6=8$ となる。

これから, (＊)を用いると，数列 $\{a_n\}$ は, 4, 8, 6, 2, 4, 8, …と周期 4 の周期数列であることが帰納的にわかる。

したがって，$2003=4\times500+3$ から，s_{2003} の 1 の位の数は s_3 の 1 の位の数と等しく, 6 である。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ であり，(2)と同様にして $-1<\beta^{2003}<0$ より，α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数は 6 となる。

[解　説]

文系に類題があるのですが，理系のこの問題では，数値が少し異なるだけにもかかわらず, (＊)を用いてオーソドックスに周期性の説明を行おうとすると，たいへん時間がかかりそうでした。a_1 と a_2 の特性について調べるのが，一筋縄ではいかないからです。そのため, 1 の位だけを計算して，周期性が現れたところで，それ以降は「帰納的に」と書いているわけです。

© 電送数学舎 2003

5

問題のページへ

(1)　X_nが 5 で割り切れる事象を A とすると，$\overline{A}$ はX_nが 5 で割り切れない，すなわち第 1 回目から第 n 回目まで 5 以外の目が出る事象を表すので，$P(\overline{A})=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ となる。

よって，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(2)　X_nが 4 で割り切れる事象を B とすると，$\overline{B}$ はX_nが 4 で割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで奇数の目が n 回出るか，奇数の目が$n-1$回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　X_nが 20 で割り切れる事象は $A\cap B$ なので，

$$\begin{aligned}p_n&=P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\end{aligned}$$

さて，$\overline{A}\cap\overline{B}$ はX_nが 5 でも 4 でも割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで 1 または 3 の目が n 回出るか，1 または 3 の目が$n-1$回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，
$$\begin{aligned}p_n&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-p_n&=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log(1-p_n)&=\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\\&=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

ここで，一般的に$-1<r<1$のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$$

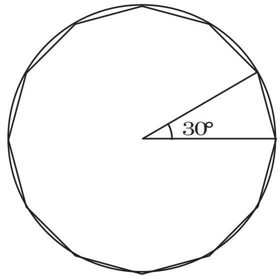
［解 説］

有名問題です。最後の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ は，証明を省略して使っています。

© 電送数学舎 2003

$\boxed{6}$

問題のページへ



半径 1 の円に正十二角形を内接させ，正十二角形の 1 辺の長さを l をすると，余弦定理より，

$$l^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 30^\circ = 2-\sqrt{3}\,,\ \ l = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

さて，明らかに正十二角形の周の長さは，円周の長さ 2π より短いので，

$$12l < 2\pi\,,\ \ 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi\,,\ \ 36(2-\sqrt{3}) < \pi^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$1.73^2 < 3 < 1.74^2$ から $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ となるので，

$$36(2-\sqrt{3}) > 9.36 > 9.3025 = 3.05^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より $\pi^2 > 3.05^2$ となり，円周率 π は 3.05 より大きい。

［解 説］

1 年ほど前，「円周率が 3 ならば円と正六角形は同じなると塾の先生が言っていた」と子供が話していたことを思い出しました。正八角形を用いても証明はたぶんできるだろうという気がしましたが，安全策をとり正十二角形を用いました。

© 電送数学舎 2003