1

解答解説のページへ

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。
△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。
このとき，a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2,\quad y \leqq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3)　$h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

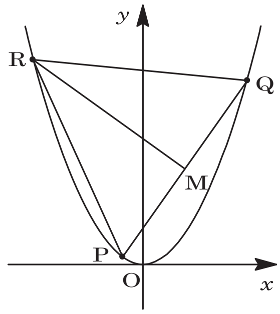
(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

1

問題のページへ



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形より，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

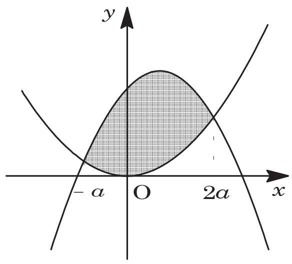
まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

［解 説］

まず，複素数平面上での回転を用いて考えました。しかし，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

2

問題のページへ



領域 $D: y \geqq x^2$，$y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$ の境界を表す 2 つの放物線 $y=x^2$ ……①，$y=-2x^2+3ax+6a^2$ ……②の交点は $x^2=-2x^2+3ax+6a^2$ より，$x^2-ax-2a^2=0$

$$(x+a)(x-2a)=0,\ x=-a,\ 2a$$

また，$x+y=k$ とおくと，$y=-x+k$ ……③となり，傾き -1 の直線を表す。

まず，直線③が領域 D と共有点をもつ k の最大値を求める。放物線②の接線の傾きが -1 となるのは，②より $y'=-4x+3a$ なので，

$$-4x+3a=-1,\ x=\frac{3a+1}{4}$$

(i) $\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a\left(a \geqq \dfrac{1}{5}\right)$ のとき

接点 $\left(\dfrac{3a+1}{4},\ -2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\dfrac{3a+1}{4}+6a^2\right)$ で k は最大となり，最大値は，

$$k=\frac{3a+1}{4}-2\left(\frac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\frac{3a+1}{4}+6a^2=\frac{57}{8}a^2+\frac{3}{4}a+\frac{1}{8}$$

(ii) $\dfrac{3a+1}{4} > 2a\left(0 < a < \dfrac{1}{5}\right)$ のとき

①と②の交点 $(2a,\ 4a^2)$ で k は最大となり，最大値は $k=2a+4a^2$ である。

次に，直線③が領域 D と共有点をもつ k の最小値を求める。放物線①の接線の傾きが -1 となるのは，①より $y'=2x$ なので，

$$2x=-1,\ x=-\frac{1}{2}$$

(iii) $-a \leqq -\dfrac{1}{2}\left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

接点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ で k は最小となり，最小値は $k=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$ である。

(iv) $-a > -\dfrac{1}{2}\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

①と②の交点 $(-a,\ a^2)$ で k は最小となり，最小値は $k=-a+a^2$ である。

以上より，最大値 M，最小値 m は，$0 < a < \dfrac{1}{5}$ のとき $M=2a+4a^2$，$m=-a+a^2$，また $\dfrac{1}{5} \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき $M=\dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8}$，$m=-a+a^2$，さらに $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $M=\dfrac{57}{8}a^2+\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{8}$，$m=-\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

最大値，最小値をとる $(x,\ y)$ が接点か交点かで場合分けをします。注意力と計算力が要求されます。

$\boxed{3}$

問題のページへ

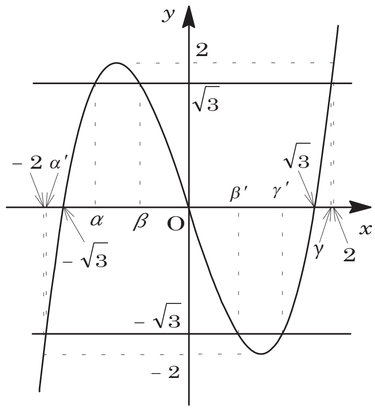
(1)　$f(x)=x^3-3x$ より，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2)　$f(x)=a$ とおくと，$g(x)=0$ は，

$$a^3-3a=0,\ a=0,\ \pm\sqrt{3}$$



(i)　$a=0$ のとき　$f(x)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

(ii)　$a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。

(iii)　$a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ とおく。

すると，$-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……$(*)$が成立するので，$g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3)　$h(x)=0$ より，$\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり，$g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき，$a=0,\ \pm\sqrt{3}$ であり，(2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となり，それぞれの a の値に対し，(1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に，$g(x)=-\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ となり，それぞれの a の値に対し，(1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに，$(*)$から a の値に重複は存在しないので，x の値も重複はない。

よって，$h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

［解　説］

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

4

問題のページへ

(1)　正方形の 3 枚の板を，左から A，B，C とする。3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり，確率はそれぞれ次のようになる。

(i)　A を 3 回裏返す場合　$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii)　A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(iii) A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$ である。

(2)　n 回の操作の結果，黒の板が 1 枚である確率が p_n であり，また 2 枚，3 枚，0 枚である確率をそれぞれ q_n，r_n，s_n とおくと，

$$p_{n+1}=s_n+\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{3}p_n\cdots\cdots\cdots④$$

①②に③④を代入すると, $n\geqq 2$ として,

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots⑤,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$q_n=\frac{3}{2}\left(p_{n+1}-\frac{1}{3}p_{n-1}\right)=\frac{3}{2}p_{n+1}-\frac{1}{2}p_{n-1}$

⑥に代入すると, $n\geqq 3$ として,

$$\frac{3}{2}p_{n+2}-\frac{1}{2}p_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}p_n-\frac{1}{2}p_{n-2}\right),\quad 9p_{n+2}=10p_n-p_{n-2}$$

ここで，$n=2k-1$ $(k\geqq 2)$ とおくと，

$$9p_{2k+1}=10p_{2k-1}-p_{2k-3},\quad p_{2k+1}=\frac{10}{9}p_{2k-1}-\frac{1}{9}p_{2k-3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

さて，$p_1=1$ で, (1)より $p_3=\frac{7}{27}\times 3=\frac{7}{9}$ から，⑦を変形すると，

$$p_{2k+1}-p_{2k-1}=\frac{1}{9}(p_{2k-1}-p_{2k-3})=(p_3-p_1)\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}=-2\left(\frac{1}{9}\right)^k\cdots\cdots\cdots⑧$$

$$p_{2k+1}-\frac{1}{9}p_{2k-1}=p_{2k-1}-\frac{1}{9}p_{2k-3}=p_3-\frac{1}{9}p_1=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨×9－⑧より，$8p_{2k+1}=6+2\left(\frac{1}{9}\right)^k$，$p_{2k+1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$

$k=1$ をあてはめると $p_3=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$ となり，このときも満たされている。

[解 説]

奇数回だけに限定せずに，一般的に漸化式を立てて解きました。なお，理系に類題が出ています。