

1

解答解説のページへ

xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は 1 辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し, 10 の位の数を a , 1 の位の数を b とおいたとき, $a+b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し, 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数, および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば, その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

3

解答解説のページへ

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を、円 C に内接させながら、円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の 1 点を P とする。点 P が、円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は、円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, \quad f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x), \quad f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に、 $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば、関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

5

解答解説のページへ

r を正の実数とする。 xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A , 点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし、球 A と球 B の和集合とは、球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

- (1) V を r の関数として表し、そのグラフの概形をかけ。
- (2) $V = 8$ となるとき、 r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意：円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ を満たす。

6

解答解説のページへ

片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ、次の操作をくり返し行う。

さいころを振り、出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し, 3, 4 であればまん中の板を裏返し, 5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば、色の並び方は「黒白黒」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の結果、色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

1

問題のページへ

$p < q$ として, $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より,

$$\frac{q^2 - p^2}{q - p} = \sqrt{2}, \quad q + p = \sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $PQ = a$ より, $(q - p)^2 + (q^2 - p^2)^2 = a^2$

$$(q - p)^2 + (q - p)^2(q + p)^2 = a^2$$

$$\textcircled{1} \text{より}, 3(q - p)^2 = a^2, \quad q - p = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて, 線分 PQ の中点を M とすると,

$$M\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より}, q = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{3}}\right), \quad p = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \text{なので,}$$

$$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 2 - 2 \cdot \frac{1}{4}\left(2 - \frac{a^2}{3}\right) = 1 + \frac{a^2}{6}$$

よって, $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12}\right)$ である。

ここで, $\triangle PQR$ は 1 辺の長さ a の正三角形より,

$$RM \perp PQ, \quad RM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて, 直線 PQ の方向ベクトルは, その成分を $(1, \sqrt{2})$ とすることができるので, それに垂直な単位ベクトルは $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1)$ である。以下, 複号同順として,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{OM} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}, 1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

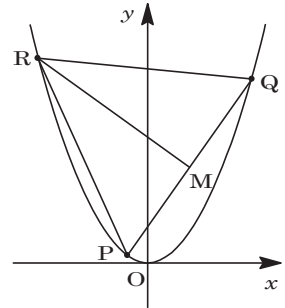
R は放物線 $y = x^2$ 上にあるので,

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2, \quad \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(1 \mp 2a + a^2)$$

まとめると, $5a^2 \mp 18a = 0$ となり, $a > 0$ から $a = \frac{18}{5}$ である。

[解説]

まず, 複素数平面上での回転を用いて考えました。しかし, 計算がかなり複雑になってしまい, 方向転換をした結果が上の解です。



2

問題のページへ

- (1) p, q を $p \geq 1, 0 \leq q \leq 9$ である整数として, 3桁以上の平方数を $(10p+q)^2$ とおく。

$$(10p+q)^2 = p^2 \times 100 + 2pq \times 10 + q^2$$

すると, q^2 の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 1 の位の数 b となる。また, $2pq$ とくり上がりの数の和の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 10 の位の数 a である。

さて, $2pq$ は偶数なので, $a+b$ が偶数となるのは, 右表より, $q=0, q=2, q=8$

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2 の 1 の位	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
くり上がり	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8

の場合のみであり, このとき, b は 0 または 4 である。

- (2) p, q, r を $p \geq 1, 0 \leq q \leq 9, 0 \leq r \leq 9$ である整数として, 5桁以上の平方数を $(100p+10q+r)^2$ とおくと, 条件より, 10 の位の数と 1 の位の数が同じ数となるので, その和は偶数である。

よって, $(100p+10q+r)^2$ の 1 の位の数は, (1) より 0 または 4 である。

- (i) 1 の位の数が 0 のとき 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 0 なので, この平方数は 10000 で割り切れる。
(ii) 1 の位の数が 4 のとき 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 4 である。このとき, (1) より $r=2$ または $r=8$ である。

(ii-i) $r=2$ のとき $(100p+10q+2)^2 = 4(50p+5q+1)^2$

n を自然数として, $(100p+10q+2)^2 = 10000n + 4444$ と仮定すると,

$$(50p+5q+1)^2 = 2500n + 1111$$

これより, $(50p+5q+1)^2$ の 10 の位の数と 1 の位の数は, ともに 1 である。

すると, 平方数の 10 の位の数と 1 の位の数の和は偶数となるが, (1) で示したように, この場合はありえない。

(ii-ii) $r=8$ のとき $(100p+10q+8)^2 = 4(50p+5q+4)^2$

n を自然数として, $(100p+10q+8)^2 = 10000n + 4444$ と仮定すると,

$$(50p+5q+4)^2 = 2500n + 1111$$

(i) と同様に, この場合もありえない。

- (i)(ii) より, $(100p+10q+r)^2$ は 10000 で割り切れる。

[解説]

わかってしまえばそれまでですが, 道に迷いながら, 論理を詰めていくには, かなりのエネルギーが必要となります。

3

問題のページへ

初めの点 P の位置を A(10, 0), 円板 D を円 C に内接させながら転がし, 点 P が再び円 C の円周に接する点を B とする。

また, 円板 D の中心を D とし, OD と x 軸の正の向きとのなす角を θ とおく。さらに, 2 円の接点を T とおき, $\angle TDP = \varphi$ とすると,

$$10\theta = 3\varphi, \quad \varphi = \frac{10}{3}\theta$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ のとき, $0 \leq \theta \leq \frac{3}{5}\pi$ となることより,

B $(10 \cos \frac{3}{5}\pi, 10 \sin \frac{3}{5}\pi)$ である。

また, B から x 軸に下ろした垂線の足を H $(10 \cos \frac{3}{5}\pi, 0)$ とおく。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = (7 \cos \theta, 7 \sin \theta) + (3 \cos(\theta - \varphi), 3 \sin(\theta - \varphi)) \\ &= (7 \cos \theta, 7 \sin \theta) + (3 \cos(-\frac{7}{3}\theta), 3 \sin(-\frac{7}{3}\theta)) \\ &= (7 \cos \theta + 3 \cos \frac{7}{3}\theta, 7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta) \end{aligned}$$

ここで, P(x, y) とおくと,

$$x = 7 \cos \theta + 3 \cos \frac{7}{3}\theta, \quad y = 7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta$$

まず, 扇形 OAB の面積は, $\angle AOB = \frac{3}{5}\pi$ より, $\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{3}{5}\pi = 30\pi$ である。

次に, $\triangle OBH$ の面積は, $\angle BOH = \pi - \frac{3}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi$ より,

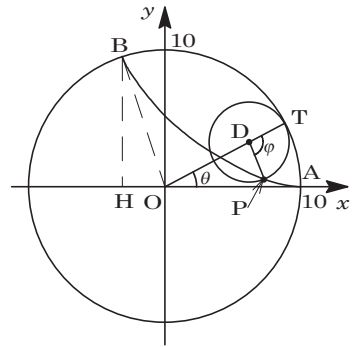
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cos \frac{2}{5}\pi \cdot 10 \sin \frac{2}{5}\pi = 50 \cos \frac{2}{5}\pi \sin \frac{2}{5}\pi = 25 \sin \frac{4}{5}\pi$$

点 P の描く曲線 AB と x 軸, 直線 BH に囲まれた部分の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{10 \cos \frac{3}{5}\pi}^{10} y dx = \int_{\frac{3}{5}\pi}^0 (7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta) (-7 \sin \theta - 7 \sin \frac{7}{3}\theta) d\theta \\ &= 7 \int_0^{\frac{3}{5}\pi} (7 \sin^2 \theta + 4 \sin \frac{7}{3}\theta \sin \theta - 3 \sin^2 \frac{7}{3}\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{さて, } \int_0^{\frac{3}{5}\pi} 7 \sin^2 \theta d\theta &= \frac{7}{2} \int_0^{\frac{3}{5}\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{7}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{3}{5}\pi} \\ &= \frac{21}{10} \pi - \frac{7}{4} \sin \frac{6}{5}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{5}\pi} 4 \sin \frac{7}{3}\theta \sin \theta d\theta &= -2 \int_0^{\frac{3}{5}\pi} (\cos \frac{10}{3}\theta - \cos \frac{4}{3}\theta) d\theta \\ &= -2 \left[\frac{3}{10} \sin \frac{10}{3}\theta - \frac{3}{4} \sin \frac{4}{3}\theta \right]_0^{\frac{3}{5}\pi} = \frac{3}{2} \sin \frac{4}{5}\pi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{5}\pi} 3 \sin^2 \frac{7}{3} \theta d\theta &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{3}{5}\pi} (1 - \cos \frac{14}{3} \theta) d\theta = \frac{3}{2} \left[\theta - \frac{3}{14} \sin \frac{14}{3} \theta \right]_0^{\frac{3}{5}\pi} \\ &= \frac{9}{10} \pi - \frac{9}{28} \sin \frac{4}{5} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } S &= 7 \left(\frac{21}{10} \pi - \frac{7}{4} \sin \frac{6}{5} \pi + \frac{3}{2} \sin \frac{4}{5} \pi - \frac{9}{10} \pi + \frac{9}{28} \sin \frac{4}{5} \pi \right) \\ &= 7 \left(\frac{6}{5} \pi - \frac{7}{4} \sin \frac{6}{5} \pi + \frac{51}{28} \sin \frac{4}{5} \pi \right) \end{aligned}$$

以上より、円 C の内側で、曲線 AB の上側の部分の面積は、

$$\begin{aligned} &30\pi + 25 \sin \frac{4}{5} \pi - 7 \left(\frac{6}{5} \pi - \frac{7}{4} \sin \frac{6}{5} \pi + \frac{51}{28} \sin \frac{4}{5} \pi \right) \\ &= \frac{108}{5} \pi + \frac{49}{4} \sin \frac{4}{5} \pi + \frac{49}{4} \sin \frac{6}{5} \pi = \frac{108}{5} \pi + \frac{49}{4} \sin \frac{4}{5} \pi - \frac{49}{4} \sin \frac{4}{5} \pi \\ &= \frac{108}{5} \pi \end{aligned}$$

また、曲線 AB によって分けられた円 C のもう 1 つの部分の面積は、

$$10^2 \pi - \frac{108}{5} \pi = \frac{392}{5} \pi$$

[解説]

よく見かける内サイクロイドが題材になっています。ただ、積分計算は、かなり多めです。

4

問題のページへ

(1) $f_1(x) = x^3 - 3x$ より, $f_1'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f_1(x) = a$ を満たす異なる実数 x の個数は,
 $y = f_1(x)$ と $y = a$ のグラフの共有点の個数に
 等しいので, 右表より, $a < -2$, $2 < a$ のとき
 1 個, $a = \pm 2$ のとき 2 個, $-2 < a < 2$ のとき
 3 個である。

x	...	-1	...	1	...
$f_1'(x)$	+	0	-	0	+
$f_1(x)$	↗	2	↘	-2	↗

(2) $f_1(x) = t$ とおくと, $f_2(x) = a$ は,

$$t^3 - 3t = a \cdots \cdots (*)$$

(i) $a < -2$ のとき

(*) は $t < -2$ に解を 1 個もつので, $f_1(x) = t$
 の解 x は 1 個である。

(ii) $a = -2$ のとき

(*) の解は $t = -2, 1$ となり, $f_1(x) = t$ の解 x
 は $2 + 3 = 5$ 個となる。

(iii) $-2 < a < 2$ のとき

(*) は $-2 < t < 2$ に解を 3 個もつので, $f_1(x) = t$ の解 x は $3 \times 3 = 9$ 個である。

(iv) $a = 2$ のとき

(*) の解は $t = -1, 2$ となり, $f_1(x) = t$ の解 x は $3 + 2 = 5$ 個となる。

(v) $a > 2$ のとき

(*) は $t > 2$ に解を 1 個もつので, $f_1(x) = t$ は解 x は 1 個である。

(i)~(v) より, $f_2(x) = a$ の解の個数は, 次のようになる。

$a < -2$, $2 < a$ のとき 1 個, $a = \pm 2$ のとき 5 個, $-2 < a < 2$ のとき 9 個

(3) $-2 < a < 2$ のとき, $f_n(x) = a$ を満たす実数 x が $-2 < x < 2$ に 3^n 個あるという命
 題が, すべての自然数に対して成立することを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

$f_1(x) = a$ の解は, (1) より $-2 < x < 2$ に 3 個あ
 る。これを $x = \alpha, \beta, \gamma$ とおく。

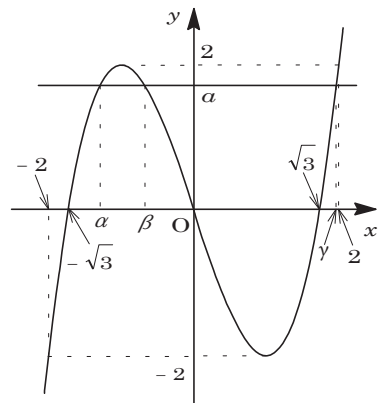
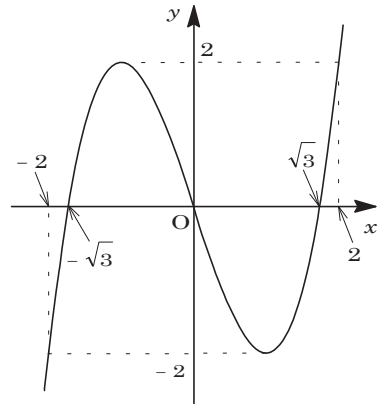
(ii) $n = k$ のとき

$-2 < t < 2$ のとき $f_k(x) = t$ の解が $-2 < x < 2$
 に 3^k 個あると仮定する。

このとき, $f_{k+1}(x) = a$ は,

$$t^3 - 3t = a, \quad f_1(f_k(x)) = a$$

すると, 解は $f_k(x) = \alpha, \beta, \gamma$ より求まる。



仮定より, $f_k(x) = \alpha$, $f_k(x) = \beta$, $f_k(x) = \gamma$ の解は, $-2 < \alpha < \beta < \gamma < 2$ から, $-2 < x < 2$ に, それぞれ 3^k 個ずつあり, それらはすべて異なる。

すなわち, $f_{k+1}(x) = a$ の解は, $-2 < x < 2$ に $3 \times 3^k = 3^{k+1}$ 個存在する。

(i)(ii)より, $n \geq 1$, $-2 < a < 2$ では, $f_n(x) = a$ は $-2 < x < 2$ に 3^n 個の解をもつ。

そこで, $n \geq 1$ を $n \geq 3$ とし, a の値を $a = 0$ に限定しても上の命題は成り立つので, $n \geq 3$ のとき $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n である。

[解説]

実数解の個数を調べる頻出問題ですが, ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。特に(3)で, 数学的帰納法を十分に機能させるために, 拡張した命題を証明しなくてはならないという点が, その最たるところです。

5

問題のページへ

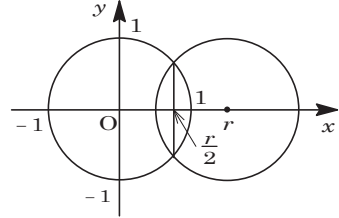
(1) (i) $r \geq 2$ のとき

球 A と B は共通部分がないので、 $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{8}{3}\pi$ である。

(ii) $0 < r < 2$ のとき

円 $x^2 + y^2 = 1$ と円 $(x-r)^2 + y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転して、球 A と B をつくと考える。

そして、直線 $x = \frac{r}{2}$ に関する対称性を考慮すると、



球 A と B の和集合の体積 V は、

$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{r}{2}} (1-x^2) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{r}{2}}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{r}{2} + 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r^3}{8} + 1 \right) \right\} = \pi \left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right)$$

ここで、 $\frac{dV}{dr} = \pi \left(-\frac{r^2}{4} + 1 \right) = -\frac{\pi}{4}(r+2)(r-2)$ より、

r	0	...	2
$\frac{dV}{dr}$	1	+	0
V	$\frac{4}{3}\pi$	\nearrow	$\frac{8}{3}\pi$

V は $0 < r < 2$ で右表のように単調に増加し、さらに

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{\pi}{2}r < 0$$

これから、グラフは上に凸である。

(i)(ii)より、 V のグラフの概形は右図のようになる。

(2) $\frac{8}{3}\pi > \frac{8}{3} \times 3.14 > 8$ より、 $V = 8$ となる r は、 $0 < r < 2$ にた

だ 1 つ存在する。

(1)より、 $\pi \left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} \right) = 8 \dots\dots\dots (*)$

$$-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} = \frac{8}{\pi}, \quad -r^3 + 12r = \frac{96}{\pi} - 16$$

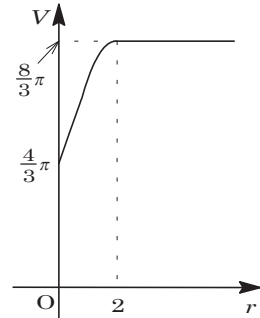
ここで、 $3.14 < \pi < 3.15$ より、 $14.47 < \frac{96}{\pi} - 16 < 14.58$

$r = 1.5$ のとき、 $-r^3 + 12r = 1.5 \times (12 - 2.25) = 14.625$

$r = 1.4$ のとき、 $-r^3 + 12r = 1.4 \times (12 - 1.96) = 14.056$

$r = 1.45$ のとき、 $-r^3 + 12r \doteq 1.45 \times (12 - 2.10) = 14.355$

以上より、(*)を満たす r の小数第 1 位までの概数は 1.5 である。



[解説]

数値計算が超難です。(2)では、グラフから、 r の値が2より少し小さいと判断し、とりあえず 1.5 で計算し、その後、微調整をしました。電卓なしで計算するのは、本当に疲れます。

6

問題のページへ

(1) 正方形の 3 枚の板を、左から A, B, C とする。3 回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり、確率はそれぞれ次のようになる。

$$(i) \text{ A を 3 回裏返す場合 } \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$(ii) \text{ A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合 } {}_3C_1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$(iii) \text{ A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合 } {}_3C_1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

(i)(ii)(iii)より、求める確率は、 $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$ である。

(2) 3 枚の板の両端の色に注目して、 n 回の操作の結果、A と C の板が「白・白」となる確率を p_n 、「白・黒」または「黒・白」となる確率を q_n 、「黒・黒」となる確率を r_n おく。このとき、 $p_1 = \frac{1}{3}$ 、 $q_1 = \frac{2}{3}$ 、 $r_1 = 0$ である。

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3}r_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$p_n + q_n + r_n = 1 \text{ より, } \textcircled{2} \text{ から, } q_{n+1} = \frac{2}{3}(1 - q_n) + \frac{1}{3}q_n = -\frac{1}{3}q_n + \frac{2}{3}$$

$$q_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(q_n - \frac{1}{2}\right), \quad q_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{よって, } q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{ より, } p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \frac{1}{3}p_n - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④を満たす 1 つの数列を、 α 、 β を定数として、 $p_n = \alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta$ とおくと、

$$\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \beta = \frac{1}{3}\left\{\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta\right\} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

すると、 $-\frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{6}$ 、 $\beta = \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{6}$ より、 $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ となる。

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{ より, } p_{n+1} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left\{p_n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\right\}$$

$$p_n - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より、求める両端が白の確率は、 $p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$

【解 説】

確率の計算に、漸化式を利用する頻出問題です。なお、漸化式の解き方の詳細については、「ピンポイントレクチャー」を参照してください。