1

解答解説のページへ

$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。$a,\ b$ を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$$

が最小になるようにする。このとき，

$$g(-1)=f(-1),\quad g(1)=f(1)$$

であることを示せ。

2

解答解説のページへ

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

0 以上の実数 $s,\ t$ が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

Nを1以上の整数とする。数字1，2，…，Nが書かれたカードを1枚ずつ，計N枚用意し，甲，乙の2人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が1枚カードを引く。そのカードに書かれた数をaとする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう1回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は，そのカードに書かれた数をbとする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は，$b=0$とする。$a+b>N$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$の場合は，乙が1枚カードを引く。そのカードに書かれた数をcとする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$の場合は，乙はもう1回カードを引く。そのカードに書かれた数をdとする。$a+b<c+d\leqq N$の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，aの値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が2回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

(2)　甲が2回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。

1

問題のページへ

$f(x)$は$f(0)=0$を満たす2次関数なので，$f(x)=px^2+qx\quad(p\neq 0)$とおくと，

$$f'(x)=2px+q$$

また，$x<0$のとき$g'(x)=a$，$x>0$のとき$g'(x)=b$である。

さて，$I(a)=\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$，$J(b)=\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$とすると，

$$I(a)=\int_{-1}^{0}(2px+q-a)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-a)^3\Big]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{6p}\{(q-a)^3-(-2p+q-a)^3\}$$

また，$J(b)=\int_{0}^{1}(2px+q-b)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-b)^3\Big]_{0}^{1}$

$$=\frac{1}{6p}\{(2p+q-b)^3-(q-b)^3\}$$

すると，$I'(a)=\frac{1}{6p}\{-3(q-a)^2+3(-2p+q-a)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(-2p+q-a+q-a)(-2p)$$

$$=2(a+p-q)$$

a	$\cdots$	$-p+q$	$\cdots$
$I'(a)$	$-$	0	$+$
$I(a)$	$\searrow$		$\nearrow$

右の増減表より，$a=-p+q$ ……①のとき，$I(a)$は最小となる。

さらに，$J'(b)=\frac{1}{6p}\{-3(2p+q-b)^2+3(q-b)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(q-b+2p+q-b)(-2p)$$

$$=2(b-p-q)$$

b	$\cdots$	$p+q$	$\cdots$
$J'(b)$	$-$	0	$+$
$J(b)$	$\searrow$		$\nearrow$

右の増減表より，$b=p+q$ ……②のとき，$J(b)$は最小となる。

したがって，$I(a)+J(b)$が最小となるのは, a, bが任意の実数より，①と②がともに成立するときである。

このとき, ①②より,

$$f(-1)=p-q=-a=g(-1),\quad f(1)=p+q=b=g(1)$$

［解 説］

普通に$f(x)$を設定して，式変形を進めました。ただ，$I(a)$，$J(b)$を展開するのは面倒そうだったので，微分法を利用しました。

2

問題のページへ

$a^2-a=a(a-1)$であり，条件より，aは奇数，$a-1$は偶数となる。

ここで，aと$a-1$の公約数をgとし，b, cを正の整数とすると，

$$a=gb\cdots\cdots\cdots①,\ \ a-1=gc\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって，gは1の正の約数から$g=1$となり，aと$a-1$は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$なので，a^2-aが 10000 で割り切れるとき，偶数$a-1$は2^4という約数をもち，kを整数として，

$$a-1=2^4\times k\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$3\leqq a\leqq 9999$より，$2\leqq 2^4\times k\leqq 9998$となり，$1\leqq k\leqq 624$である。

よって，kが5^4を約数としてもつことはない。

また，kが約数として，$5^i\ (i=1,\ 2,\ 3)$をもつと仮定すると，aはそれぞれ5^{4-i}という約数をもつことになり，aと$a-1$が互いに素であることに反する。

以上より，lを奇数として，

$$a=5^4\times l\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす1つの$(l,\ k)$は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$なので，

$$625\times1-16\times39=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625と16は互いに素なので，nを整数として，

$$l-1=16n,\ \ l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで，$3\leqq a\leqq 9999$より，$0<16n+1<16$となり，$n=0$のみ満たされる。

よって，求めるaは，$a=625$である。

［解 説］

当然ですが，aと$a-1$は互いに素です。この事実とaの範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

3

問題のページへ

$s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s^2+t^2=1$ のとき，$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ ……①に対して，$x^2=X$ とおくと，①は，

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解 $X=\alpha$, β について，

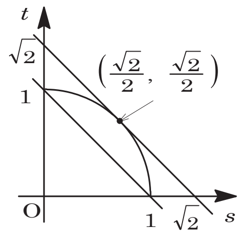
$$D/4=(s+t)^2-(s-t)^2=4st \geqq 0,\ \alpha+\beta=2(s+t) \geqq 0,\ \alpha\beta=(s-t)^2 \geqq 0$$

これより，②の 2 つの解はともに 0 以上であり，①の解はすべて実数となる。

さて，$s+t=u$ とすると，

$$(s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2=2-u^2$$

よって，①は，$x^4-2ux^2+(2-u^2)=0$ ……③となる。



また，u のとりうる値の範囲は，st 平面上において，右図の四分円と直線 $s+t=u$ が共有点をもつ条件から，$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ である。

したがって，①の解 x のとる値の範囲は，③が $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの解をもつ x の条件として求められる。

③より，$u^2+2x^2u-2-x^4=0$ として，$f(u)=u^2+2x^2u-2-x^4$ とおくと，

$$f(0)=-2-x^4<0$$

また，$v=f(u)$ のグラフの軸は，$u=-x^2 \leqq 0$ より，求める条件は，

$$f(1)=1+2x^2-2-x^4 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$x^4-2x^2+1 \geqq 0$, $(x^2-1)^2 \geqq 0$ となり，つねに成立する。

⑤より，$x^4-2\sqrt{2}x^2 \leqq 0$, $x^2(x^2-2\sqrt{2}) \leqq 0$ より，$x^2-2\sqrt{2} \leqq 0$ となり，

$$x^2-2^{\frac{3}{2}} \leqq 0,\ -2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，$-2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$ である。

[解 説]

後半，場合分けが必要かとも思いましたが，不要であるように式が設定されていました。

4

問題のページへ

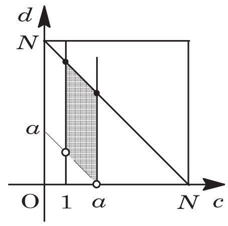
(1)　まず，$b=0$ のとき，$a+b>N$ となることはありえないので，乙が勝つのは次の 2 通りとなる。

(i)　$c>a$ のとき

$a<c\leqq N$ より，条件を満たす整数 c は $N-a$ 個存在するので，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-a}{N}$ である。

(ii)　$c\leqq a$ かつ $a<c+d\leqq N$ のとき

条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数が $a(N-a)$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{a(N-a)}{N^2}$ である。



(i)(ii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{N-a}{N}+\frac{a(N-a)}{N^2}=\frac{N^2-a^2}{N^2}$$

よって，甲が勝つ確率は，$1-\dfrac{N^2-a^2}{N^2}=\dfrac{a^2}{N^2}$ である。

(2)　$b\geqq 1$ のとき，乙が勝つ場合は次の 3 通りである。

(i)　$a+b>N$ のとき

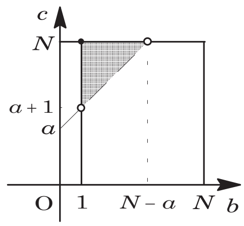
$N-a<b\leqq N$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-(N-a)}{N}=\dfrac{a}{N}$ である。

(ii)　$a+b\leqq N$ かつ $a+b<c$ のとき

条件を満たす整数 $(b,\ c)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は，

$$1+2+\cdots\cdots+(N-a-1)=\frac{1}{2}(N-a-1)(N-a)$$

よって，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}$ である。

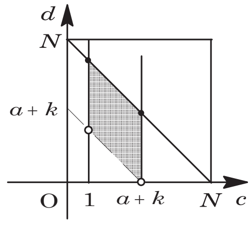


(iii)　$a+b\leqq N$ かつ $a+b\geqq c$ かつ $a+b<c+d\leqq N$ のとき

まず b を固定し，$b=k$ $(1\leqq k\leqq N-a)$ における乙の勝つ確率を p_k とおく。

条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は $(a+k)(N-a-k)$ となるので，

$$p_k=\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}$$



ここで，甲が数字 k の書かれたカードを引く確率はつねに $\dfrac{1}{N}$ なので，このとき乙の勝つ確率 P は，

$$P=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}p_k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}=\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-a}(a+k)(N-a-k)$$

ここで，$a+k=l$ とおくと，

$$P=\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l(N-l)=\frac{1}{N^2}\sum_{l=a+1}^{N}l-\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l^2$$

$$=\frac{(N+a+1)(N-a)}{2N^2}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

(i)(ii)(iii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{a}{N}+\frac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}+P$$

$$=\frac{a}{N}+\frac{N-a}{N}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

$$=1-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

よって，甲が勝つ確率は，$\dfrac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$である。

［解 説］

問題文で乙の勝つ場合が設定されているので，(1)(2)とも乙が勝つ事象の余事象として，甲の勝つ確率を求めました。文字がたくさん出てくるので，頭を整理するために，格子点の個数を対応させ，朴訥に解いてみました。