

1

解答解説のページへ

$x > 0$ に対し、 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し、 $f(x)$ の第 n 次導関数は、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し、 a_n , b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく。 h_n を用いて a_n , b_n の一般項を求めよ。

2

解答解説のページへ

$|z| > \frac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち、

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする。このとき、 T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ。
- (2) x_0 を正の数とすると、数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める。 $x_0 > \frac{1}{2}$ であれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ であることを示せ。

4

解答解説のページへ

3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

5

解答解説のページへ

N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

- (i) 甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は、 $b=0$ とする。 $a+b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii) $a+b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。 $a+b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv) $a+b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b < c+d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
- (2) 甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
ただし、各カードが引かれる確率は等しいものとする。

6[解答解説のページへ](#)

r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad y^2 + z^2 \geq r^2, \quad z^2 + x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ に対し、数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が存在し、 $f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ と表さ

れることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき

$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ より、 $a_1 = 1$, $b_1 = -1$ である。

(ii) $n=k$ のとき

ある a_k , b_k に対して、 $f^{(k)}(x) = \frac{a_k + b_k \log x}{x^{k+1}}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{b_k x^{-1} x^{k+1} - (a_k + b_k \log x)(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}} \\ &= \frac{b_k - (k+1)(a_k + b_k \log x)}{x^{k+2}} = \frac{\{-(k+1)a_k + b_k\} - (k+1)b_k \log x}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

ここで、 $a_{k+1} = -(k+1)a_k + b_k$, $b_{k+1} = -(k+1)b_k$ とおくと、 $n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より、 $f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ と表される。

したがって、 a_n , b_n に関する漸化式は、 $a_1 = 1$, $b_1 = -1$ で、

$$a_{n+1} = -(n+1)a_n + b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = -(n+1)b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(2) ②より、 $\frac{b_{n+1}}{(n+1)!} = -\frac{b_n}{n!}$ と変形すると、

$$\frac{b_n}{n!} = \frac{b_1}{1!} (-1)^{n-1} = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^n n!$$

①に代入すると、 $a_{n+1} = -(n+1)a_n + (-1)^n n!$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割って、

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{a_n}{(-1)^n n!} - \frac{1}{n+1}$$

$n \geq 2$ において、

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!} = \frac{a_1}{(-1)^1 \cdot 1!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -h_n$$

よって、 $a_n = -(-1)^n n! h_n$

$n=1$ をあてはめると、 $a_1 = -(-1) \cdot 1! \cdot 1 = 1$ となり、 $n=1$ のときも成立する。

[解説]

b_n の一般項はパターン通りに求められますが、 a_n の一般項を求めることも考えて、2 つの漸化式に同様の変形を加えました。

2

問題のページへ

2次方程式 $z^2 - 2z - w = 0$ の解を $z = \alpha, \beta$ とすると、解と係数の関係から、

$$\alpha + \beta = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta = -w \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって、2点 α, β を結ぶ線分の midpoint は、点 1 である。

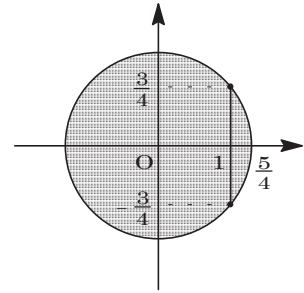
また、条件より、 $|\alpha| \leq \frac{5}{4}, |\beta| \leq \frac{5}{4}$ なので、 $\textcircled{2}$ から、

$$|w| = |-\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

すると、 $|w|$ が最大になるのは、 $|\alpha| = |\beta| = \frac{5}{4}$ の場合である。そこで、図から、 $\textcircled{3}$ を満たす α, β は、

$$\alpha = 1 \pm \frac{3}{4}i, \quad \beta = 1 \mp \frac{3}{4}i \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{このとき}, \quad w = -\alpha\beta = -\left(1 \pm \frac{3}{4}i\right)\left(1 \mp \frac{3}{4}i\right) = -\frac{25}{16}$$



[解説]

意味のつかみにくい問題文ですが、 $z^2 - 2z - w = 0$ の解がともに $|z| \leq \frac{5}{4}$ である条件を求めるといふ設問に一致します。図に依存した直観的な解法を記しました。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ に対して,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\{1 + e^{-2(x-1)}\} + \frac{1}{2}x \cdot (-2)e^{-2(x-1)} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-2(x-1)} + \left(\frac{1}{2} - x\right)(-2)e^{-2(x-1)} \\ &= 2(x-1)e^{-2(x-1)} \end{aligned}$$

よって、 $x > \frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は右表のようになり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \frac{1}{2}$ から、 $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ である。

x	$\frac{1}{2}$	\cdots	1	\cdots
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	\searrow	0	\nearrow

(2) (1)より、 $f'(x) \geq 0$ なので、 $x > \frac{1}{2}$ で $f(x)$ は単調に増加する。

すると、 $x_0 > \frac{1}{2}$ から $x_1 = f(x_0) > f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+e) > \frac{1}{2}$ となり、帰納的に、 $x_n > \frac{1}{2}$ である。

さて、 $x_n \neq 1$ のとき、 c_n を 1 と x_n の間の数として、平均値の定理より、

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(c_n), \quad f(x_n) - f(1) = f'(c_n)(x_n - 1)$$

そこで、 $x_{n+1} = f(x_n)$ 、 $1 = f(1)$ から、

$$|x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| = |f'(c_n)| |x_n - 1|$$

$x_n > \frac{1}{2}$ より $c_n > \frac{1}{2}$ となるので、(1)より $|f'(c_n)| < \frac{1}{2}$ であり、

$$|x_{n+1} - 1| < \frac{1}{2} |x_n - 1|$$

$x_n = 1$ のときは、 $x_{n+1} = f(1) = 1$ なので、このときも含めて、

$$|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |x_n - 1|$$

よって、 $|x_n - 1| \leq |x_0 - 1| \left(\frac{1}{2}\right)^n$

これより、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ より $|x_n - 1| \rightarrow 0$ となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

[解説]

漸化式で表された数列の極限を求めるときに、平均値の定理を利用する典型的な問題です。

4

問題のページへ

$a^2 - a = a(a-1)$ であり、条件より、 a は奇数、 $a-1$ は偶数となる。

ここで、 a と $a-1$ の公約数を g とし、 b, c を正の整数とすると、

$$a = gb \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a-1 = gc \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より}, \quad g(b-c) = 1$$

よって、 g は 1 の正の約数から $g=1$ となり、 a と $a-1$ は互いに素である。

さて、 $10000 = 2^4 \times 5^4$ なので、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるとき、偶数 $a-1$ は 2^4 という約数を持ち、 k を整数として、

$$a-1 = 2^4 \times k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

すると、 $3 \leq a \leq 9999$ より、 $2 \leq 2^4 \times k \leq 9998$ となり、 $1 \leq k \leq 624$ である。

よって、 k が 5^4 を約数としてもつことはない。

また、 k が約数として、 5^i ($i=1, 2, 3$) をもつと仮定すると、 a はそれぞれ 5^{4-i} という約数をもつことになり、 a と $a-1$ が互いに素であることに反する。

以上より、 l を奇数として、

$$a = 5^4 \times l \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4}\text{より}, \quad 5^4 \times l - 1 = 2^4 \times k, \quad 625l - 16k = 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{5}$ を満たす 1 つの (l, k) は、 $(l, k) = (1, 39)$ なので、

$$625 \times 1 - 16 \times 39 = 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}\textcircled{6}\text{より}, \quad 625(l-1) - 16(k-39) = 0, \quad 625(l-1) = 16(k-39)$$

625 と 16 は互いに素なので、 n を整数として、

$$l-1 = 16n, \quad l = 16n+1$$

$$\textcircled{4}\text{から}, \quad a = 5^4(16n+1) = 625(16n+1)$$

そこで、 $3 \leq a \leq 9999$ より、 $0 < 16n+1 < 16$ となり、 $n=0$ のみ満たされる。

よって、求める a は、 $a=625$ である。

[解説]

当然ですが、 a と $a-1$ は互いに素です。この事実と a の範囲に制限があることが、本問を解くうえでのポイントとなっています。

5

問題のページへ

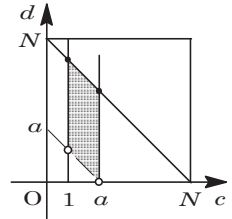
(1) まず、 $b = 0$ のとき、 $a + b > N$ となることはありえないので、乙が勝つのは次の 2 通りとなる。

(i) $c > a$ のとき

$a < c \leq N$ より、条件を満たす整数 c は $N - a$ 個存在するので、このときの乙の勝つ確率は、 $\frac{N - a}{N}$ である。

(ii) $c \leq a$ かつ $a < c + d \leq N$ のとき

条件を満たす整数 (c, d) は、右図の網点部の格子点に対応し、その個数が $a(N - a)$ より、このときの乙の勝つ確率は、 $\frac{a(N - a)}{N^2}$ である。



(i)(ii)より、乙が勝つ確率は、

$$\frac{N - a}{N} + \frac{a(N - a)}{N^2} = \frac{N^2 - a^2}{N^2}$$

よって、甲が勝つ確率は、 $1 - \frac{N^2 - a^2}{N^2} = \frac{a^2}{N^2}$ である。

(2) $b \geq 1$ のとき、乙が勝つ場合は次の 3 通りである。

(i) $a + b > N$ のとき

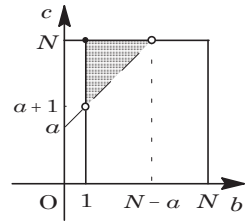
$N - a < b \leq N$ より、このときの乙の勝つ確率は、 $\frac{N - (N - a)}{N} = \frac{a}{N}$ である。

(ii) $a + b \leq N$ かつ $a + b < c$ のとき

条件を満たす整数 (b, c) は、右図の網点部の格子点に対応し、その個数は、

$$1 + 2 + \dots + (N - a - 1) = \frac{1}{2}(N - a - 1)(N - a)$$

よって、このときの乙の勝つ確率は、 $\frac{(N - a - 1)(N - a)}{2N^2}$



である。

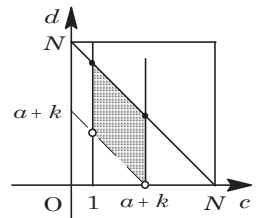
(iii) $a + b \leq N$ かつ $a + b \geq c$ かつ $a + b < c + d \leq N$ のとき

まず b を固定し、 $b = k$ ($1 \leq k \leq N - a$) における乙の勝つ確率を p_k とおく。

条件を満たす整数 (c, d) は、右図の網点部の格子点に対応し、その個数は $(a + k)(N - a - k)$ となるので、

$$p_k = \frac{(a + k)(N - a - k)}{N^2}$$

ここで、甲が数字 k の書かれたカードを引く確率はつねに $\frac{1}{N}$ なので、このとき乙の勝つ確率 P は、



$$P = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-a} p_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-a} \frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2} = \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^{N-a} (a+k)(N-a-k)$$

ここで、 $a+k=l$ とおくと、

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{N^3} \sum_{l=a+1}^N l(N-l) = \frac{1}{N^2} \sum_{l=a+1}^N l - \frac{1}{N^3} \sum_{l=a+1}^N l^2 \\ &= \frac{(N+a+1)(N-a)}{2N^2} - \frac{1}{6N^3} \{ N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1) \} \end{aligned}$$

(i)(ii)(iii)より、乙が勝つ確率は、

$$\begin{aligned} &\frac{a}{N} + \frac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2} + P \\ &= \frac{a}{N} + \frac{N-a}{N} - \frac{1}{6N^3} \{ N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1) \} \\ &= 1 - \frac{1}{6N^3} \{ N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1) \} \end{aligned}$$

よって、甲が勝つ確率は、 $\frac{1}{6N^3} \{ N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1) \}$ である。

[解説]

問題文で乙の勝つ場合が設定されているので、(1)(2)とも乙が勝つ事象の余事象として、甲の勝つ確率を求めました。文字がたくさん出てくるので、頭を整理するために、格子点の個数を対応させ、朴訥に解いてみました。

6

問題のページへ

不等式 $x^2 + y^2 \leq r^2 \dots\dots ①$, $y^2 + z^2 \geq r^2 \dots\dots ②$, $z^2 + x^2 \leq r^2 \dots\dots ③$ で表される立体を K とおく。

まず, K は yz 平面に対称であり, $x \geq 0$ の部分を考える。そこで, K を平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq r$) で切ったときの断面を表す式は, ①③より,

$$y^2 \leq r^2 - t^2, \quad -\sqrt{r^2 - t^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - t^2} \dots\dots ④$$

$$z^2 \leq r^2 - t^2, \quad -\sqrt{r^2 - t^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - t^2} \dots\dots ⑤$$

よって, 平面 $x = t$ 上の断面は, ②④⑤の連立式として表される。

この断面が存在する条件は, $\sqrt{r^2 - t^2} \geq r \cos \frac{\pi}{4}$ より,

$$\sqrt{2} \sqrt{r^2 - t^2} \geq r, \quad 2(r^2 - t^2) \geq r^2$$

$$0 \leq t \leq r \text{ から, } 0 \leq t \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

このとき, 右図のように θ を設定すると,

$$r \cos \theta = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad r \sin \theta = t \dots\dots ⑥$$

さて, 断面積を $S(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} S(t) &= 4 \left\{ \left(\sqrt{r^2 - t^2} \right)^2 - \frac{1}{2} t \sqrt{r^2 - t^2} \times 2 - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \right\} \\ &= (4 - \pi) r^2 - 4t^2 - 4t \sqrt{r^2 - t^2} + 4r^2 \theta \end{aligned}$$

よって, K の体積 V は,

$$V = 2 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(t) dt = 2 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left\{ (4 - \pi) r^2 - 4t^2 - 4t \sqrt{r^2 - t^2} + 4r^2 \theta \right\} dt$$

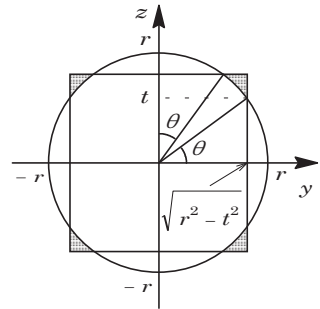
ここで, $\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \left\{ (4 - \pi) r^2 - 4t^2 \right\} dt = \left[(4 - \pi) r^2 t - \frac{4}{3} t^3 \right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{5}{3} \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \right) r^3$

また, $u = \sqrt{r^2 - t^2}$ とおくと, $u^2 = r^2 - t^2$ から, $2u du = -2t dt$ となり,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4t \sqrt{r^2 - t^2} dt &= 4 \int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}} u(-u) du = 4 \int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}} u^2 du = 4 \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r \\ &= \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) r^3 \end{aligned}$$

さらに, ⑥より, $r \cos \theta d\theta = dt$ なので,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4r^2 \theta dt &= 4r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cos \theta d\theta = 4r^3 \left\{ \left[\theta \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \right\} \\ &= 4r^3 \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right\} = 4r^3 \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi + 2\sqrt{2} - 4 \right) r^3 \end{aligned}$$



以上より,

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \left(\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \right) r^3 - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) r^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2} - 4 \right) r^3 \right\} \\ &= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3 \end{aligned}$$

[解説]

②式の不等号が逆向きになると, 有名問題です。パラメータ θ の置き方については, 1994年, 1998年, 2003年の類題が参考になります。