1

解答解説のページへ

四角形 ABCD が, 半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で, 辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき, 残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。

3

解答解説のページへ

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

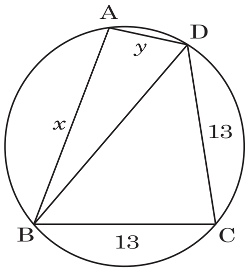
4

解答解説のページへ

θ は，$0° < \theta < 45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x) = |x+1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。

1

問題のページへ



△BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C}=2\times\frac{65}{8},\ \ \mathrm{BD}=\frac{65}{4}\sin C\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot 13^2\cos C$$
$$=2\cdot 13^2(1-\cos C)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{65^2}{4^2}\sin^2 C=2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$$5^2\cdot 13^2(1+\cos C)(1-\cos C)=2\cdot 13^2\cdot 4^2(1-\cos C)$$

$1-\cos C>0$ より，$25(1+\cos C)=32$，$\cos C=\dfrac{7}{25}$ ………③

②より，$\mathrm{BD}^2=2\times 13^2\times\dfrac{18}{25}$，$\mathrm{BD}=\dfrac{6\times 13}{5}=\dfrac{78}{5}$

ここで，$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，条件より，

$$x+y=44-13\times 2,\ \ x+y=18\ \cdots\cdots\cdots④$$

△ABD に余弦定理を適用して，$\dfrac{78^2}{25}=x^2+y^2-2xy\cos(180°-C)$

$$\frac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-2xy+2xy\cos C$$

③より，$\dfrac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-\dfrac{36}{25}xy$，$6^2\times 13^2=25(x+y)^2-36xy$ ………⑤

④⑤より，$36xy=-6^2\times 13^2+5^2\times 18^2$，$36xy=(78+90)(-78+90)$

$$xy=\frac{168\times 12}{36}=56\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑥より, x, y は方程式 $t^2-18t+56=0$ の 2 つの解となるので,

$$(t-4)(t-14)=0,\ \ t=4,\ 14$$

よって，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA})=(4,\ 14),\ (14,\ 4)$

[解 説]

センター試験でよく見かける構図の問題ですが，いろいろな考え方が浮かび，方針の決めにくい良問です。また，計算にも工夫が必要です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率 P_2 は，

$$P_2 = (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)^3 = (1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$= (1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が 3 個出る場合は，×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○のいずれかなので，その確率 P_3 は，

$$P_3 = (1-p)p^2 + p(1-p)p^2 + (1-p)^3 p + (1-p)p(1-p)^2$$
$$= p(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$= p(1-p)(2-3p+3p^2)$$

(3)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1} = (1-p)p^n$ である。

(iii) 最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき
このときの確率は，$1 \leqq k \leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2 p^{n-k-1} = (1-p)^3 p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率 P_n は，

$$P_n = (1-p)p^{n-1} + (1-p)p^n + \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3 p^{n-2}$$
$$= (1-p)p^{n-1}(1+p) + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2}$$
$$= (1-p)p^{n-2}\{p(1+p) + (n-1)(1-p)^2\}$$
$$= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + n - 1\}$$

［解　説］

(1)と(2)で具体例を練習し，(3)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

3

問題のページへ

(1)　正の整数 x, y, z に対して，$x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①より，$n = 1$ のとき,

$$x + y + z = xyz\,,\ \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ より，$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} \leqq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$

$x^2 \leqq 3$ から，$x = 1$ となり，このとき②から,

$$yz = y + z + 1\,,\ (y-1)(z-1) = 2$$

$0 \leqq y-1 \leqq z-1$ より，$y-1 = 1$，$z-1 = 2$ となり，$(y,\ z) = (2,\ 3)$ から,

$$(x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 3)$$

(2)　正の実数 x, y, z に対して，$x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①より，$n = 3$ のとき,

$$x^3 + y^3 + z^3 = xyz\,,\ \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $0 < x \leqq y \leqq z$ と大小関係を設定すると,

$$\frac{z^2}{xy} \geqq \frac{z^2}{z \cdot z} = 1\,,\ \frac{x^2}{yz} > 0\,,\ \frac{y^2}{zx} > 0$$

これより, ③は成立しない。

すると, ③式が x, y, z について対称なので, 他の大小関係においても, ③を満たす $(x,\ y,\ z)$ は存在しない。

［解 説］

(2)は(3)と同じ方針で式変形をしました。見かけと異なり, 意外なほどスムーズに証明できました。

4

問題のページへ

$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$ より，

$$f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3=(x+1)^3+|x-\cos 2\theta|^3-(x-1)^3$$
$$=6x^2+2+|x-\cos 2\theta|^3$$

また，$0°<\theta<45°$ から，$0<\cos 2\theta<1$ である。

(i)　$-1\leqq x<\cos 2\theta$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=-(x-\cos 2\theta)$ より，$f(x)=6x^2+2-(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x-3(x-\cos 2\theta)^2=-3\{x^2-2(\cos 2\theta+2)x+\cos^2 2\theta\}$$

ここで，$f'(x)=0$ とすると，

$$x=\cos 2\theta+2\pm\sqrt{(\cos 2\theta+2)^2-\cos^2 2\theta}=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{\cos 2\theta+1}$$
$$=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{2}\cos\theta$$

まず，$2\cos^2\theta+1+2\sqrt{2}\cos\theta>1$ であり，また $\alpha=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$ とおくと，$f'(-1)=-12-3(-1-\cos 2\theta)^2<0$，しかも $f'(\cos 2\theta)=12\cos 2\theta>0$ なので，$-1<\alpha<\cos 2\theta$ である。

これより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	$\cos 2\theta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii)　$\cos 2\theta\leqq x\leqq 1$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=x-\cos 2\theta$ より，$f(x)=6x^2+2+(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x+3(x-\cos 2\theta)^2>0$$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

(i)(ii)より，$f(x)$ は $x=\cos 2\theta$ で連続なので，最小値をとるときの x は，

$$x=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$$

[解　説]

絶対値付きの関数の最大・最小問題です。三角関数も絡んでいるので，きめ細かい論理が必要です。