1

解答解説のページへ

連立不等式

$$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0,\quad y+x^2-2x-3\leqq 0$$

の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

r は $0<r<1$ を満たす実数, n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を, 次の条件①, ②を満たす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で, 半径の和はもとの円の半径に等しい。

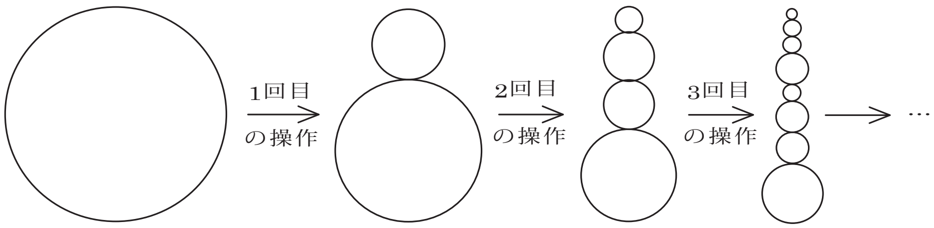
② 新しい 2 つの円は互いに外接し, もとの円に内接する。

以下のようにして, 平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に, 平面上に半径 1 の円を描く。

・次に, この円に対して操作(P)を行い, 2 つの円を得る(これを 1 回目の操作という)。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて, 操作(P)を行い, 2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$。



(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

3

解答解説のページへ

正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

1

問題のページへ

(1) 連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ ……①，$y+x^2-2x-3\leqq 0$ ……②に対して，

①より，$y\geqq 0$ かつ $y\leqq |x^2-5|-4$，または $y\leqq 0$ かつ $y\geqq |x^2-5|-4$

ここで，境界線 $y=|x^2-5|-4$ は，

$$y=-(x^2-5)-4=-x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$$

$$y=(x^2-5)-4=x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$$

これより，①をまとめると，

(i) $y\geqq 0$ のとき

$y\leqq -x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$

$y\leqq x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$

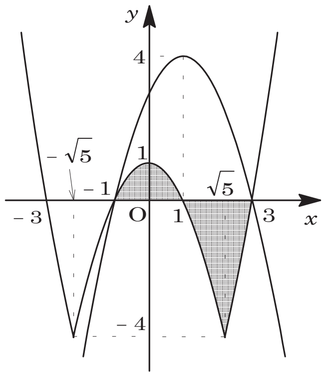
(ii) $y\leqq 0$ のとき

$y\geqq -x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$

$y\geqq x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$

また，②より，$y\leqq -x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

以上より，不等式①②を満たす領域 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) D の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}-(-x^2+1)\,dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}-(x^2-9)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{\sqrt{5}}+\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{5}}^{3}$$

$$=-\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{3}(27-5\sqrt{5})+9(3-\sqrt{5})$$

$$=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}$$

［解　説］

不等式と領域に関する基本問題です。手堅くゲットしたい１題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　n 回の操作で得られる円のうち，半径が $r^k(1-r)^{n-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である円は，半径が r 倍になる k 回の操作を選ぶ場合の数に一致するので，${}_n\mathrm{C}_k$ 個ある。

これより, n 回の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和 l_n は,

$$l_n = 2\pi\left\{ {}_n\mathrm{C}_0(1-r)^n + {}_n\mathrm{C}_1 r(1-r)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 r^2(1-r)^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n r^n \right\}$$
$$= 2\pi(1-r+r)^n = 2\pi$$

(2)　2 回目の操作で得られる 4 つの円は，半径 r^2 のものが 1 個，$r(1-r)$ のものが 2 個，$(1-r)^2$ のものが 1 個より，それらの面積の和 S_2 は,

$$S_2 = \pi r^4 + 2\pi r^2(1-r)^2 + \pi(1-r)^4 = \pi\left\{ r^2 + (1-r)^2 \right\}^2 = \pi(2r^2-2r+1)^2$$

(3)　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和 S_n は, (1)と同様に考え,

$$S_n = \pi\left\{ {}_n\mathrm{C}_0(1-r)^{2n} + {}_n\mathrm{C}_1 r^2(1-r)^{2n-2} + {}_n\mathrm{C}_2 r^4(1-r)^{2n-4} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n r^{2n} \right\}$$
$$= \pi\left\{ (1-r)^2 + r^2 \right\}^n = \pi(2r^2-2r+1)^n$$

［解 説］

題意を把握した後の立式は容易です。残るは二項定理の適用に気付くことだけです。

3

問題のページへ

a を 0 以上の整数, b を 0 以上 9 以下の整数とし，$m=10a+b$ とおくと,

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10a+b)^4\\ &= 5(10^4a^4+4\cdot10^3a^3b+6\cdot10^2a^2b^2+4\cdot10ab^3+b^4)\\ &= 10^2(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

これより，$5m^4$ の下 2 桁の数は $5b^4$ の下 2 桁の数と一致する。

そこで, b のそれぞれの値に対して，$5b^4$ の下 2 桁の数を計算すると，右表のようになる。

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4 の下 2 桁	0	1	16	81	56	25	96	1	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	0	5	80	5	80	25	80	5	80	5

以上より，$5m^4$ の下 2 桁は 0, 5, 25, 80 である。

［解 説］

整数 m を $m=10a+b$ とおくことがすべてといっても，過言ではありません。

4

問題のページへ

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となるのは，最初 $n-m-1$ 回は任意，次の 1 回が裏で，その後 m 回続けて表が出る場合より，その確率 p_m は，

$$p_m=(1-p)p^m \quad (0\leqq m<n)$$

ただし，$m=n$ のとき，$p_m=p^m$ である。

(2)　最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は，(1)より，

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$$

(3)　2 度のゲームにおいて，高い方のブロックの高さが m であるのは，1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下，または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m，または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は，(1)(2)より，

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$\begin{aligned}r_m&=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=p_m(2q_{m-1}+p_m)\\&=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})\end{aligned}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

[解 説]

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。