1

解答解説のページへ

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

2

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときは R = P とする。

(1) a を $-1\leqq a\leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 A, P, Q が，5 つの条件 $A = aP + (a+1)Q$，$P^2 = P$，$Q^2 = Q$，$PQ = O$，$QP = O$ を満たすとする。ただし $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，$(P+Q)A = A$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の 5 つの条件をすべて満たす行列 P, Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし，$2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 $x,\ a$ に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。

$\boxed{1}$

問題のページへ

まず，$(1+x)^k$ を二項展開すると，

$$(1+x)^k = {}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k = 1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \geqq n$ として，整式 $P(x)$ の次数を m とおき,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより，$(1+x)^k P(x)$ は, $m+k$ 次の整式となり,

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると,

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ b_2 = a_2 + a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + a_0\,{}_k\mathrm{C}_n \cdots\cdots\cdots(*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする。

ここで，$(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数 b_0，b_1，b_2，…，b_n がすべて整数であるとき, (*)より,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ a_2 = b_2 - a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 - \cdots - a_0\,{}_k\mathrm{C}_n$$

これより，a_0，a_1，a_2，…，a_n はすべて整数となる。

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

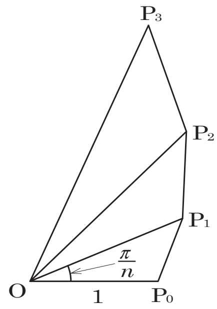
［解 説］

上の解では簡単に記していますが，証明の構図は「a_0 が整数→a_1 が整数→a_2 が整数→ … →a_n が整数」です。

2

問題のページへ

$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k に対し，$\triangle P_{k-1}OP_k$ はすべて相似となり，



$P_{k-1}P_k = a_k$ とおくと，

$$a_{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_k$$

これより，$a_k = a_1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ となり，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = a_1 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{1}{n}-1}$$

$$= a_1 n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

ここで，$\triangle OP_0P_1$ に余弦定理を適用すると，

$$a_1{}^2 = 1^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

よって，$a_1 = \sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n^2}}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

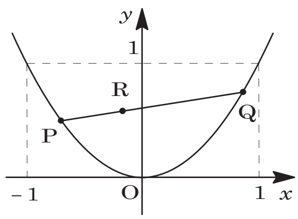
$$= \sqrt{\pi^2+1}\,(e-1)$$

［解 説］

図形と数列の極限の融合問題です。基本事項の確認が主となっており，落とすことはできません。

3

問題のページへ



(1)　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲Dに点$(a,\ b)$が属することより，

$$a=\frac{2p+q}{3}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

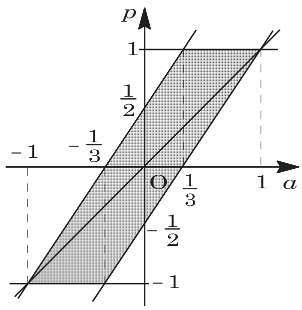
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$とおき，$-1\leqq p\leqq 1$ ……④，$-1\leqq q\leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより，aの値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i)　$-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii)　$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

(iv)　$\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

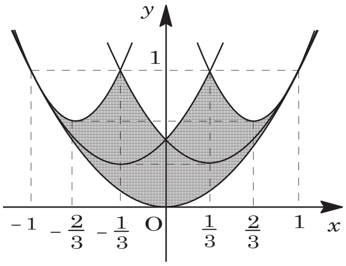
(2)　$a<-1$，$1<a$のときは，右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

よって，(1)から，Dを表す不等式は，

$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\ \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$A=aP+(a+1)Q\cdots\cdots$①，$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=O$，$QP=O$ より，

$$(P+Q)A=(P+Q)(aP+(a+1)Q)=aP^2+(a+1)PQ+aQP+(a+1)Q^2$$
$$=aP+(a+1)Q=A$$

(2)　$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$のとき，$\det A=a(a+1)>0$ より A^{-1} は存在する。

(1)より，$(P+Q)A=A$ の両辺に右から A^{-1} をかけると, E を単位行列として,

$$(P+Q)AA^{-1}=AA^{-1}，P+Q=E\cdots\cdots\cdots②$$

②から $Q=E-P$ となり，①に代入すると

$$A=aP+(a+1)(E-P)，A=-P+(a+1)E$$

よって，$P=(a+1)E-A=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q=E-P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=O$，$QP=O$ は満たされている。

(3)　(2)より，$A_k=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}=kP+(k+1)Q$ と表せるので,

$$A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2=(nP+(n+1)Q)((n-1)P+nQ)\cdots\cdots(2P+3Q)$$
$$=n(n-1)\cdots\cdots2P+(n+1)n\cdots\cdots3Q=n!P+\frac{(n+1)!}{2}Q$$
$$=n!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{n!}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix}$$

[解　説]

類題演習の経験のありそうな行列の演算に関する頻出問題です。

5

問題のページへ

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となるのは，最初 $n-m-1$ 回は任意，次の 1 回が裏で，その後 m 回続けて表が出る場合より，その確率 p_m は，

$$p_m = (1-p)p^m \quad (0 \leqq m < n)$$

ただし，$m=n$ のとき，$p_m = p^m$ である。

(2)　最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i)　$0 \leqq m < n$ のとき

$$q_m = \sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k = (1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p} = 1-p^{m+1}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$q_m = \sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k + p^m = (1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p} + p^m = 1$$

(3)　2 度のゲームにおいて，高い方のブロックの高さが m であるのは，1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下，または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m，または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i)　$0 \leqq m < n$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= p_m q_{m-1} + q_{m-1} p_m + {p_m}^2 = p_m(2q_{m-1} + p_m) \\ &= (1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1}) = (1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1}) \end{aligned}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$r_m = p_m q_{m-1} + q_{m-1} p_m + {p_m}^2 = 2p^m(1-p^m) + p^{2m} = 2p^m - p^{2m}$$

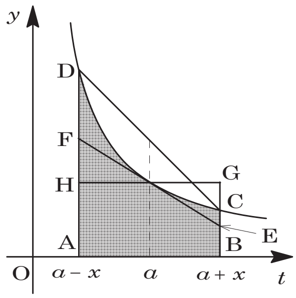
［解 説］

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。

6

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{t}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{t^2}$，$y''=\dfrac{2}{t^3}$ となり，$t>0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。



このため，曲線上の点における接線は曲線の下側にあり，曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで，$0<x<a$ より，$0<a-x<a<a+x$ において，右図から，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>(\text{台形 FABE})=(\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>\frac{1}{a}\cdot 2x=\frac{2x}{a}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<(\text{台形 ABCD})$より，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\displaystyle\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots ③$

(2)　まず，$\displaystyle\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt\ \cdots\cdots\cdots ④$

③において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{12}\ \cdots\cdots\cdots ⑤$

また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{24}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$

④⑤⑥より，

$$\frac{24}{35}=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

さらに，$\dfrac{24}{35}>0.685>0.68$，$\dfrac{17}{24}<0.709<0.71$ に注意すると，

$$0.68<\log 2<0.71$$

[解 説]

(2)では，まず $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ すなわち $a=3x$ として計算しましたが，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$ しか示せず，「やはり」という感じがしました。そこで，考え直したのが上の解です。