1

解答解説のページへ

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ -1)$ に対し，$\angle APC = \angle BPC$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$P \neq A,\ B,\ C$ とする。

4

解答解説のページへ

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。

$$a_1 = p,\ b_1 = p+1$$

$$a_{n+1} = a_n + pb_n,\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

1

問題のページへ

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx = 1$ より，$2\int_{0}^{1}(x^2+\alpha\beta)dx = 1$ となり，

$$2\left(\frac{1}{3}+\alpha\beta\right)=1,\ \alpha\beta=\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$S=\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$

$$=\frac{\alpha^3}{3}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2\beta=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2\beta$$

さて,(*)より，$\beta=\frac{1}{6\alpha}$ となり，$0\leqq\alpha\leqq\beta$ から，

$$0<\alpha\leqq\frac{1}{6\alpha},\ 0<\alpha\leqq\frac{1}{\sqrt{6}}$$

このとき，$S=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2\cdot\frac{1}{6\alpha}=-\frac{1}{12}(2\alpha^3-\alpha)$

$$\frac{dS}{d\alpha}=-\frac{1}{12}(6\alpha^2-1)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		$+$	0
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{108}$

これより，S の増減は右表のようになり，$\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき,S は最大値 $\frac{\sqrt{6}}{108}$ をとる。

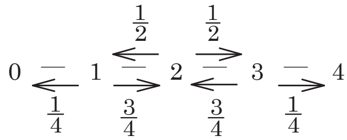
［解 説］

微積分で味付けされた条件付きの最大・最小問題です。

2

問題のページへ

(1)　まず操作(A)を 4 回繰り返した後，4 回目に初めて白が 4 枚になるのは，白の枚数に注目して場合分けをすると，その確率は，



(i)　2→1→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(ii)　2→3→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(i)(ii)より，$\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

(A)を 4 回繰り返した後，4 回目に初めて黒が 4 枚となる確率も同じく $\frac{3}{32}$ より，4 枚とも同じ色のカードになる確率は，

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

(2)　まず，操作(A)を n 回繰り返した後，白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n，白が 2 枚の確率を b_n とおくと，

$$a_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b_{n+1}=\frac{3}{4}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=1$，$b_1=0$ なので，

(i)　n が奇数のとき，$b_n=0$

(ii)　n が偶数のとき，$b_n=b_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて，操作(A)を n 回繰り返した後，n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は，$\frac{1}{4}a_{n-1}=\frac{1}{4}b_{n-2}$ から，

(i)　n が奇数のとき，$\frac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

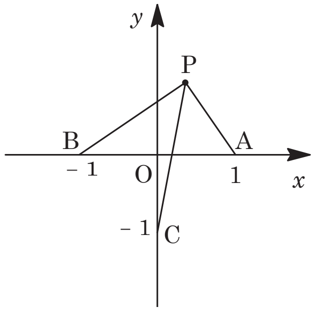
(ii)　n が偶数のとき，$\frac{1}{4}b_{n-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

［解 説］

状態の推移の対称性を利用して，(2)では漸化式を立てました。

3

問題のページへ



$A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ -1)$に対し，$P(x,\ y)$とおくと，

$$\overrightarrow{PA}=(1-x,\ -y),\ \overrightarrow{PB}=(-1-x,\ -y)$$

$$\overrightarrow{PC}=(-x,\ -1-y)$$

$\angle APC=\angle BPC$より，$\cos\angle APC=\cos\angle BPC$となり，

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$$

$$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PB}|=(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PA}|$$

$$(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=(x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$(x^2+y^2-x+y)(x^2+y^2+x+y)\geqq 0$ ……①のもとで，

$$(x^2+y^2-x+y)^2(x^2+y^2+2x+1)=(x^2+y^2+x+y)^2(x^2+y^2-2x+1)$$

ここで，$u=x^2+y^2$とおくと，

$$(u-x+y)^2(u+2x+1)=(u+x+y)^2(u-2x+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の左辺$=\{(u+y)^2-2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)+2x\}$

②の右辺$=\{(u+y)^2+2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)-2x\}$

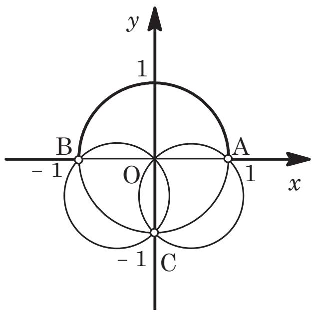
これから，②をまとめると，$-4x(u+y)(u+1)+4x\{(u+y)^2+x^2\}=0$となり，

$$x(-u+yu-y+x^2+y^2)=0$$

$u=x^2+y^2$より，$xy(x^2+y^2-1)=0$

$$x=0,\ y=0,\ x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より，$\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots①'$



以上より，$P\neq A,\ B,\ C$に注意して，①′かつ③を図示すると，点 P の軌跡は右図の太線部となり，これを表す方程式は，

$$x=0\ (y\neq -1)$$

$$y=0\ (x<-1,\ 1<x)$$

$$x^2+y^2=1\ (y>0)$$

［解 説］

条件を満たす点 P の軌跡の一部が，y 軸上や原点中心の単位円周上にあることは，問題の設定からわかります。これをもとに，計算を押し進めました。

4

問題のページへ

(1)　$x_n=a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np$，$y_n=b_n-n(n-1)p^2-np-1$ ……(＊)とおくと，

$$a_n=x_n+\frac{n(n-1)}{2}p^2+np,\ b_n=y_n+n(n-1)p^2+np+1$$

(i)　$n=1$ のとき

$a_1=p$，$b_1=p+1$ より，$x_1=a_1-p=0$，$y_1=b_1-p-1=0$

よって，x_1，y_1 はともに p^3 で割り切れる。

(ii)　$n=k$ のとき

x_k，y_k がともに p^3 で割り切れると仮定する。

条件より，$a_{n+1}=a_n+pb_n$，$b_{n+1}=pa_n+(p+1)b_n$ から，

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=a_{k+1}-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=a_k+pb_k-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=x_k+\frac{k(k-1)}{2}p^2+kp+p\{y_k+k(k-1)p^2+kp+1\}\\&\quad-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=x_k+py_k+k(k-1)p^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{k+1}&=b_{k+1}-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=pa_k+(p+1)b_k-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=p\left\{x_k+\frac{k(k-1)}{2}p^2+kp\right\}+(p+1)\{y_k+k(k-1)p^2+kp+1\}\\&\quad-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=px_k+(p+1)y_k+\frac{3k(k-1)}{2}p^3\end{aligned}$$

$k(k-1)$ は偶数なので，x_{k+1}，y_{k+1} はともに p^3 で割り切れる。

(i)(ii)より，x_n，y_n はともに p^3 で割り切れる。

(2)　(＊)より，$a_p=x_p+\dfrac{p(p-1)}{2}p^2+p^2=x_p+\dfrac{p-1}{2}p^3+p^2$

(1)より，x_p は p^3 で割り切れ，また p は奇数より $\dfrac{p-1}{2}$ は整数となり，a_p は p^2 で割り切れる。さらに，p は 3 以上なので，p^2 は p^3 で割り切れないことより，a_p は p^3 では割り切れない。

［解 説］

整数と漸化式の融合という頻出タイプの 1 題です。数学的帰納法を利用すると，明快に証明することができます。