

1

解答解説のページへ

座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え、点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す。 f を用いて直線 l_0, l_1, l_2, \dots を以下のように定める。

- l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である。
- 点 P が l_n 上を動くとき、 $f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ。
- (2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。 D_0, D_1, D_2, \dots すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき、次の操作(A)を考える。

(A) 手もちの k 枚の中から 1 枚を、等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

- (1) 最初に白 2 枚, 黒 2 枚, 合計 4 枚のカードをもっているとき, 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。
- (2) 最初に白 3 枚, 黒 3 枚, 合計 6 枚のカードをもっているとき, 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1 , G_2 とする。 G_1 , G_2 を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし、各辺の長さは 1 とする。

4

解答解説のページへ

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。
- (2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

自然数 n に対し、 $\frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}}$ を \boxed{n} で表す。たとえば、 $\boxed{1} = 1$ 、 $\boxed{2} = 11$ 、

$\boxed{3} = 111$ である。

- (1) m を 0 以上の整数とする。 $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れないことを示せ。
- (2) n が 27 で割り切れることが、 \boxed{n} が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

6

[解答解説のページへ](#)

座標平面において、媒介変数 t を用いて、 $x = \cos 2t$ 、 $y = t \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $(x', y') = (3x + y, -2x)$ とおくと, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y' \\ 2x' + 3y' \end{pmatrix}$$

$l_n : a_n x + b_n y = 1$ に代入すると,

$$-\frac{1}{2} a_n y' + \frac{1}{2} b_n (2x' + 3y') = 1, \quad b_n x' + \left(-\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2} b_n\right) y' = 1$$

この方程式が $l_{n+1} : a_{n+1} x + b_{n+1} y = 1$ に対応するので,

$$a_{n+1} = b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2} b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(2) $a_0 = 3, b_0 = 2$ のもとで, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = b_n - \left(-\frac{1}{2} a_n + \frac{3}{2} b_n\right) = \frac{1}{2} (a_n - b_n)$$

よって, $a_n - b_n = (a_0 - b_0) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}\textcircled{3}$ より, $a_{n+1} - a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となり, $n \geq 1$ において,

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} -\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この式は, $n = 0$ のときも成立している。

また, $\textcircled{1}$ より, $b_n = a_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ となり, 領域 $D_n : a_n x + b_n y > 1$ は,

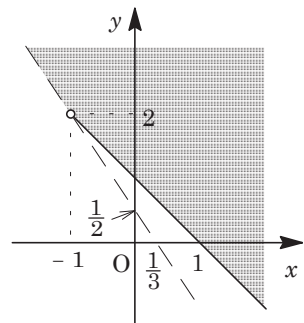
$$\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} x + \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} y > 1, \quad (x + y - 1) + (2x + y) \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ から, $l_n : a_n x + b_n y = 1$ は n の値にかかわらず, 2 直線 $x + y - 1 = 0$ と $2x + y = 0$ の交点 $(x, y) = (-1, 2)$ を通る。また, l_n の傾きを m とすると,

$$m = -\frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{2^n + 2}{2^n + 1} = -1 - \frac{1}{2^n + 1}$$

$n \geq 0$ より, $0 < \frac{1}{2^n + 1} \leq \frac{1}{2}$ となり, $-\frac{3}{2} \leq m < -1$

以上より, $D_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ のすべてに含まれるような点の範囲は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は実線部のみ含む。



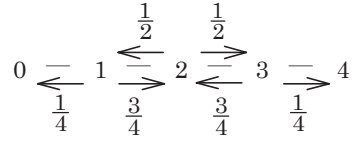
[解説]

よく見かける 1 次変換と数列の融合問題ですが, 最後の通過領域の図示まで気が抜けません。注意力が要求されます。

2

問題のページへ

- (1) 操作(A)を n 回繰り返した後、白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n 、白が 2 枚の確率を b_n とおくと、



$$a_{n+1} = b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より}, \quad b_{n+1} = \frac{3}{4} b_{n-1}$$

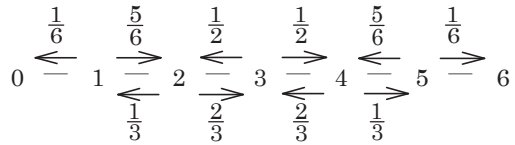
ここで、条件より、 $b_0 = 1, b_1 = 0$ なので、

- (i) n が奇数のとき、 $b_n = 0$
- (ii) n が偶数のとき、 $b_n = b_0 \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて、操作(A)を n 回繰り返した後、 n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は、 $n \geq 2$ のとき、 $\frac{1}{4} a_{n-1} = \frac{1}{4} b_{n-2}$ から、

- (i) n が奇数のとき、 $\frac{1}{4} b_{n-2} = 0$ ($n=1$ のときも成立している)
- (ii) n が偶数のとき、 $\frac{1}{4} b_{n-2} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

- (2) 操作(A)を n 回繰り返した後、白が 1 枚または 5 枚の確率を a_n 、白が 2 枚または 4 枚の確率を b_n 、白が 3 枚の確率を c_n とおくと、



$$a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = \frac{5}{6} a_n + c_n \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad c_{n+1} = \frac{2}{3} b_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3}\text{を}\textcircled{2}\text{に代入すると}, \quad b_{n+1} = \frac{5}{18} b_{n-1} + \frac{2}{3} b_{n-1} = \frac{17}{18} b_{n-1}$$

ここで、条件より、 $b_0 = 0, b_1 = 1$ なので、

- (i) n が偶数のとき、 $b_n = 0$
- (ii) n が奇数のとき、 $b_n = b_1 \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

さて、操作(A)を n 回繰り返した後、 n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は、 $n \geq 2$ のとき、 $\frac{1}{6} a_{n-1} = \frac{1}{18} b_{n-2}$ から、

- (i) n が偶数のとき、 $\frac{1}{18} b_{n-2} = 0$
- (ii) n が奇数のとき、 $\frac{1}{18} b_{n-2} = \frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$ ($n \geq 3$)

なお、 $n=1$ のとき、4 枚とも同じ色になる確率は、0 である。

[解説]

(1)は文系と共通です。(2)も(1)と同じ方法で解いています。

3

問題のページへ

- (1) 1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において、正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると、

$$OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots ①$$

また、 $\triangle ACE$ は $\angle AEC = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるので、

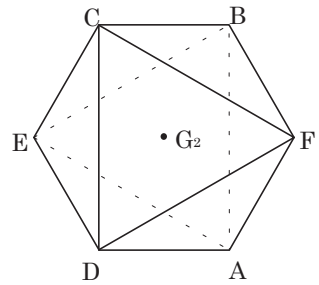
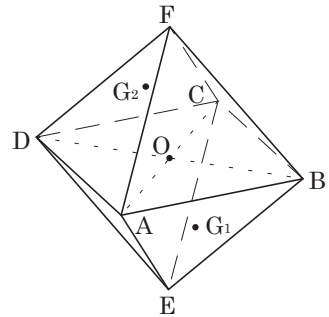
$$OA = OE = \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots ②$$

すると、四面体 OABE において、底面の正三角形 ABE の重心を G_1 とおくと、①②より、線分 OG_1 は平面 ABE に垂直である。

同様に、正三角形 CDF の重心を G_2 とおくと、線分 OG_2 は平面 CDF に垂直である。さらに、平面 ABE と平面 CDF は平行であることより、3 点 G_1, O, G_2 は一直線上にある。

これより、 $\triangle ABE$ の面を水平な台に置き、真上から見ると、正三角形 ABE を $G_2 (G_1)$ のまわりに 180° だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって、正八面体を真上から見た図は、正六角形 AFBCED を外形とする右図である。



- (2) 直線 G_1G_2 を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると、その外形は、辺 AF を G_1G_2 のまわりに回転したものに等しい。

さて、辺 BE の中点を M とおき、 $\triangle OAM$ において、

$$AG_1 = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$G_1G_2 = 2OG_1 = 2\sqrt{OA^2 - AG_1^2} = 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで、 G_1 を原点とし、平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに、 G_1A を x 軸、 G_1G_2 を z 軸とすると、

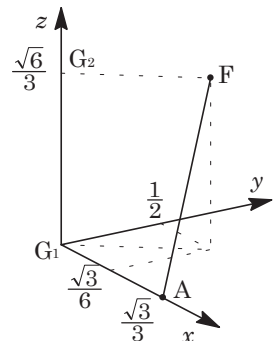
$$G_1(0, 0, 0), G_2(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}), A(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0)$$

また、点 F の x 座標と y 座標は、

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}, y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$$

よって、 $F(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ となり、

$$\overline{AF} = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{1}{6}(-\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6})$$



これより、直線 AF のパラメータ表示は、

$$(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right) + t(-\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

直線③と平面 $z = k$ ($0 \leq k \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$) との交点は、 $2\sqrt{6}t = k$ より $t = \frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり、

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}k = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}k, \quad y = 3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}k = \frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって、立体 R を平面 $z = k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと、

$$S(k) = \pi(x^2 + y^2) = \pi \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2 \right\} = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}k + \frac{1}{2}k^2 \right)$$

これより、立体 R の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} S(k) dk = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}k + \frac{1}{2}k^2 \right) dk \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}k - \frac{\sqrt{6}}{12}k^2 + \frac{1}{6}k^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{9} - \frac{\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{6}}{27} \right) = \frac{5}{54} \sqrt{6} \pi \end{aligned}$$

[解説]

ありふれた素材をもとにしたものですが、内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。

4

問題のページへ

- (1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおくと, 線分 PQ の中点の y 座標 h は,

$$h = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで, 線分 PQ の傾き m は,

$$m = \frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また, 線分 PQ の長さ L は,

$$L^2 = (p - q)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p - q)^2 \{1 + (p + q)^2\} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②を③に代入して, $L^2 = (p - q)^2(1 + m^2)$ から, $(p - q)^2 = \frac{L^2}{1 + m^2}$

②より, $(p + q)^2 = m^2$ となり, ①に代入すると,

$$h = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{4} \{ (p + q)^2 + (p - q)^2 \} = \frac{1}{4} \left(m^2 + \frac{L^2}{1 + m^2} \right)$$

- (2) $m^2 = u \geq 0$ とおくと, $h = \frac{1}{4} \left(u + \frac{L^2}{1 + u} \right)$ となり,

$$\frac{dh}{du} = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{L^2}{(1 + u)^2} \right\} = \frac{(u + 1 + L)(u + 1 - L)}{4(1 + u)^2}$$

- (i) $L \geq 1$ のとき

h の増減は右表のようになり, $u = L - 1$ のとき, h は最小値 $\frac{1}{4}(2L - 1)$ をとる。

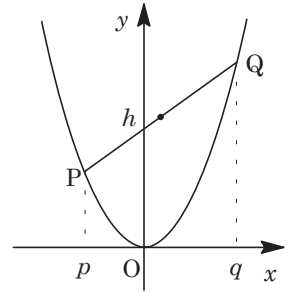
u	0	⋯	$L - 1$	⋯
$\frac{dh}{du}$		−	0	+
h	$\frac{1}{4}L^2$	↘	$\frac{1}{4}(2L - 1)$	↗

- (ii) $0 < L < 1$ のとき

$\frac{dh}{du} > 0$ より, h は単調増加し, $u = 0$ のとき, h は最小値 $\frac{1}{4}L^2$ をとる。

[解説]

微分法の標準的な問題です。なお, (2)において, 相加平均と相乗平均の関係をを用いると, (i)の場合の結論が導けます。



5

問題のページへ

(1) $\boxed{3^m} = \frac{10^{3^m} - 1}{9}$ は、 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れないことを示す。

(i) $m = 0$ のとき

$$\boxed{3^0} = \frac{10^{3^0} - 1}{9} = \frac{10 - 1}{9} = 1 \text{ は、 } 3^0 = 1 \text{ で割り切れるが、 } 3^1 = 3 \text{ では割り切れない。}$$

(ii) $m = k$ のとき

$$\boxed{3^k} = \frac{10^{3^k} - 1}{9} \text{ は、 } 3^k \text{ で割り切れるが、 } 3^{k+1} \text{ では割り切れないと仮定すると、}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3^{k+1}} &= \frac{10^{3^{k+1}} - 1}{9} = \frac{10^{3^k \cdot 3} - 1}{9} = \frac{(10^{3^k})^3 - 1}{9} = \frac{(10^{3^k} - 1)\{(10^{3^k})^2 + 10^{3^k} + 1\}}{9} \\ &= \boxed{3^k} \{(10^{3^k})^2 + 10^{3^k} + 1\} \end{aligned}$$

ここで、 $a = (10^{3^k})^2 + 10^{3^k} + 1 = 100^{3^k} + 10^{3^k} + 1 = (100^{3^k} - 1) + (10^{3^k} - 1) + 3$ とおくと、 $100^{3^k} - 1$ 、 $10^{3^k} - 1$ はともに 9 の倍数であり、これより a は 3 の倍数ではあるが、 3^2 の倍数ではない。

したがって、 $\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れるが、 3^{k+2} では割り切れない。

(i)(ii)より、 $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが、 3^{m+1} では割り切れない。

(2) n が 27 で割り切れるとき、 $n = 27l$ ($l = 1, 2, \dots$) と表せ、

$$\begin{aligned} \boxed{n} &= \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{27l} - 1}{9} = \frac{10^{27} - 1}{9} \{(10^{27})^{l-1} + (10^{27})^{l-2} + \dots + 10^{27} + 1\} \\ &= \boxed{27} \{(10^{27})^{l-1} + (10^{27})^{l-2} + \dots + 10^{27} + 1\} \end{aligned}$$

$27 = 3^3$ なので、(1)より、 $\boxed{27}$ は 27 で割り切れ、 \boxed{n} も 27 で割り切れる。

逆に、 \boxed{n} が 27 で割り切れるとき、 $\boxed{n} = \overbrace{111 \dots 111}^{n \text{ 個}}$ が 9 で割り切れるすなわち各位の数の和 n が 9 の倍数となることが必要より、 $n = 9k$ ($k = 1, 2, \dots$) とおくと、

$$\begin{aligned} \boxed{n} &= \frac{10^{9k} - 1}{9} = \frac{10^9 - 1}{9} \{(10^9)^{k-1} + (10^9)^{k-2} + \dots + 10^9 + 1\} \\ &= \boxed{9} \{(10^9)^{k-1} + (10^9)^{k-2} + \dots + 10^9 + 1\} \end{aligned}$$

$9 = 3^2$ なので、(1)より、 $\boxed{9}$ は 9 で割り切れるが、 27 では割り切れない。

すると、 $b = (10^9)^{k-1} + (10^9)^{k-2} + \dots + 10^9 + 1$ とおくと、 b が 3 で割り切れなくてはいけぬ。一方、 b を十進法で表したとき、各位の数は 1 と 0 のみであり、また 1 の個数は k より、各位の数の和は k となる。

よって、 k は 3 の倍数となり、 $n = 9k$ から n は 27 で割り切れる。

[解 説]

3 の倍数や 9 の倍数は、各位の数の和が 3 の倍数や 9 の倍数かどうかで判断できますが、この点を利用する問題です。

6

問題のページへ

$0 \leq t \leq 2\pi$ における曲線 $x = \cos 2t$, $y = t \sin t$ に対して,

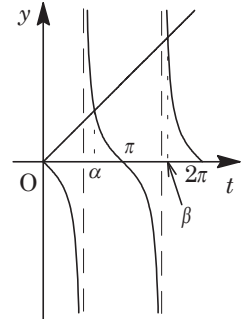
$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t$$

ここで, $\frac{dx}{dt} = 0$ の解は, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ である.

また, $\cos t \neq 0$ ($t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) のとき,

$$\frac{dy}{dt} = \cos t (\tan t + t) = \cos t \{t - (-\tan t)\}$$

そこで, $y = t$, $y = -\tan t$ のグラフを描くと右図のようになり, 原点以外の 2 つの交点を $t = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおく.



なお, $\cos t = 0$ のときは,

$$\frac{dy}{dt} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (t = \frac{\pi}{2}), \quad \frac{dy}{dt} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \quad (t = \frac{3\pi}{2})$$

以上をまとめて, x, y の増減を調べると, 下表のようになる.

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	α	...	π	...	$\frac{3\pi}{2}$...	β	...	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	-	0	+		+	0	-	0	+		+	0
x	1	\searrow	-1	\nearrow		\nearrow	1	\searrow	-1	\nearrow		\nearrow	1
$\frac{dy}{dt}$	0	+	1	+	0	-		-	-1	-	0	+	
y	0	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$	\nearrow		\searrow	0	\searrow	$-\frac{3\pi}{2}$	\searrow		\nearrow	0

これより, 曲線を描くと, その概形は右図のとおりである.

曲線の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$, $\pi \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$ の部分を, それぞれ $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3$, $y = y_4$ とおくと, 曲線によって囲まれる領域の面積 S は,

$$S = \int_{-1}^1 y_2 dx - \int_{-1}^1 y_1 dx + \int_{-1}^1 y_3 dx - \int_{-1}^1 y_4 dx$$

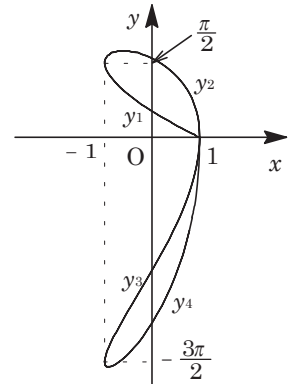
ここで, 変数を x から t に置き換えると,

$$\int_{-1}^1 y_2 dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt$$

$$\int_{-1}^1 y_1 dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t \sin t (-2 \sin 2t) dt$$

$$\int_{-1}^1 y_3 dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt$$

$$\int_{-1}^1 y_4 dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt$$



$$\begin{aligned}
\text{すると, } S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 t \sin t (-2 \sin 2t) dt \\
&\quad + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} t \sin t (-2 \sin 2t) dt \\
&= \int_0^{\pi} t \sin t (-2 \sin 2t) dt - \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{2}} t \sin t (-2 \sin 2t) dt
\end{aligned}$$

ここで, $F(t) = \int t \sin t (-2 \sin 2t) dt$ とおくと,

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int t (\cos 3t - \cos t) dt = t \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right) - \int \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right) dt \\
&= t \left(\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right) + \frac{1}{9} \cos 3t - \cos t + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{以上より, } S &= F(\pi) - F(0) - F(2\pi) + F(\pi) = 2F(\pi) - F(0) - F(2\pi) \\
&= 2 \cdot \frac{8}{9} - \left(-\frac{8}{9} \right) - \left(-\frac{8}{9} \right) = \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

[解説]

パラメータ曲線に囲まれた領域の面積を求めるものですが, 計算量は多めです。なお, 曲線の概形を描くにあたっては, 上の解に, $0 < t_1 < \frac{\pi}{2}$ として, x 座標の等しくなる $t = t_1$, $t = \pi - t_1$, $t = \pi + t_1$, $t = 2\pi - t_1$ における y 座標の大小関係の調査を加えると, 明快になります。