1

解答解説のページへ

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円をC_1とし，点$(1,\ 0)$を中心とする半径 1 の円をC_2とする。また，点$(a,\ b)$を中心とする半径tの円C_3が，C_1に内接し，かつC_2に外接すると仮定する。ただし，bは正の実数とする。

(1)　a, bをtを用いて表せ。また，tがとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　tが(1)で求めた範囲を動くとき，bの最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

3

解答解説のページへ

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

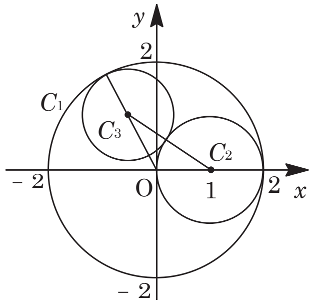
2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2 |f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　中心$(a,\ b)$，半径 t の円C_3は，円C_1の内部にあり，しかもC_2の外部にあることより，$0<t\leqq 1$……①である。

さて，C_1にC_3が内接することより，

$$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$$

①のもとで，$a^2+b^2=(2-t)^2$………②

また，C_2にC_3が外接することより，

$$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$$

①のもとで，$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$………③

②－③より，$2a-1=3-6t$となり，

$$a=-3t+2$$

②に代入して，$(-3t+2)^2+b^2=(2-t)^2$，$b^2=-8t^2+8t$

$b>0$から，①のもとで，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

すると, tがとり得る値の範囲は，$b=\sqrt{-8t(t-1)}>0$より，

$$0<t<1$$

(2)　(1)より，$b=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

すると, $0<t<1$から，$t=\frac{1}{2}$のとき, bは最大値$\sqrt{2}$をとる。

［解　説］

2 円の内接・外接についての基本問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} $$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。

なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i) $k=1$ のとき

$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii) $k=l$ のとき

$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$ \begin{aligned} (l+1)^m - (l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1} - 1)l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\, l \end{aligned} $$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m - (l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

［解　説］

1999 年に理系で出された二項係数の問題を思い出しました。この過去問に比べると，内容は基本的です。

3

問題のページへ

(1)　まず，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，いずれかの色の玉が 2 回出て，他の色の玉は 1 回ずつ出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{4^3}$$

また，同様に，操作(B)を 5 回行い，R に 4 色すべての玉が入っている確率も $\dfrac{15}{4^3}$ から，操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行ったとき，L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 は，

$$P_1=\frac{15}{4^3}\times\frac{15}{4^3}=\frac{225}{4096}$$

(2)　操作(C)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っている場合より，その確率 P_2 は，

$$P_2=\frac{15}{4^3}=\frac{15}{64}$$

(3)　操作(C)を 10 回行い，L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 10 回行い，4 色すべての玉が少なくとも 2 回ずつ出る場合である。

(i)　いずれかの色の玉が 4 回出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$${}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}$$

(ii)　2 つの色の玉が 3 回ずつ出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}$$

(i)(ii)より，$P_3=\dfrac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}+\dfrac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}=\dfrac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}$ となり，

$$\frac{P_3}{P_1}=\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}\cdot\frac{4^6}{3^2\cdot5^2}=\frac{63}{16}$$

［解 説］

どういう訳か，最初は余事象で考えようとして深みにはまってしまいました。考え直した普通の解を上に記しました。なお，(2)は(3)の誘導でしょうが，不安になってしまう設問です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f(0)=0$，$f(2)=2$ より，

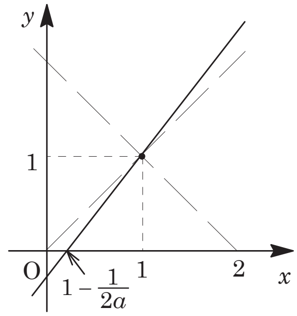
$$c=0,\ 4a+2b+c=2$$

よって，$b=1-2a$ から，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

また，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ とおくと，$x=1-\dfrac{1}{2a}$

これより，$y=f'(x)$ のグラフは右図のようになる。



(i)　$2a\geqq 1\left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx$$

$$=-\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^{1-\frac{1}{2a}}+\Big[a(x-1)^2+x\Big]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(\frac{1}{4a^2}-1\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)+a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+\left(1+\frac{1}{2a}\right)=2a+\frac{1}{2a}$$

(ii)　$-1<2a<1\left(-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)dx=\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^2=2$$

(iii)　$2a\leqq -1\left(a\leqq-\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=-2a-\frac{1}{2a}$$

(2)　(i)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は $2a=\dfrac{1}{2a}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(ii)　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$S=2$

(iii)　$a\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a'=-a\geqq\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$S=-2a-\frac{1}{2a}=2a'+\frac{1}{2a'}\geqq 2\sqrt{2a'\cdot\frac{1}{2a'}}=2$$

等号は $2a'=\dfrac{1}{2a'}\left(a=-\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(i)～(iii)より，S は $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 2 をとる。

［解　説］

定積分の計算問題ですが，三角形や台形の面積計算と読み直しても可です。