

1

解答解説のページへ

自然数 $m \geq 2$ に対し、 $m-1$ 個の二項係数 ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ を考え、これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

- (1) m が素数ならば、 $d_m = m$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数 k に対し、 $k^m - k$ が d_m で割り切れることを、 k に関する数学的帰納法によって示せ。
- (3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

2

解答解説のページへ

実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件(i), (ii), (iii)を満たすとす
る。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。

3

解答解説のページへ

スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

- (A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
 - (B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
 - (C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあればその玉を R に入れる。
- (1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い、さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。
- (2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。
- (3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

a を正の実数とし、空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a \}$$

$$D_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a \}$$

を考える。 D_1 を y 軸のまわりに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分 x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。 E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{ (x, y, z) \mid x \geq 0 \}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

- (1) $W(a)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

- (1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ を満たすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

- (2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$

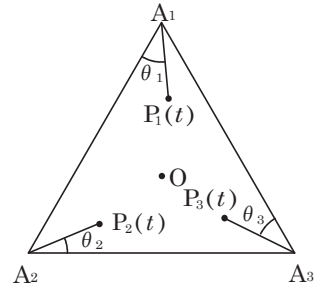
6

解答解説のページへ

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ がある。 $\triangle A_1A_2A_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を, $d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる。また,

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{A_1A_2}, \quad \vec{a}_2 = \vec{A_2A_3}, \quad \vec{a}_3 = \vec{A_3A_1} \\ \vec{e}_1 &= \vec{A_1B_1}, \quad \vec{e}_2 = \vec{A_2B_2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{A_3B_3} \end{aligned}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して, 時刻 0 に A_n を出発をし, \vec{e}_n の向きに速さ 1 で直進する点を考え, 時刻 t におけるその位置を $P_n(t)$ と表すことにする。



(1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と, ベクトル \vec{a}_1 とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2, \theta_2 = \angle B_2A_2A_3, \theta_3 = \angle B_3A_3A_1$ によって定義する。 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで, $\theta_1 + \theta_2$ の値のとりうる範囲を α を用いて表せ。

(3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて, 次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, \quad d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, \quad d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき, 時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(P_1(T), O) \leq 3, \quad d(P_2(T), O) \leq 3, \quad d(P_3(T), O) \leq 3$$

が成立することを示せ。

1

問題のページへ

- (1) $m \geq 2$ のとき, ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ は, すべて自然数であり, $m \geq 3$ では, $2 \leq k \leq m-1$ において,

$${}_m C_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

ここで, m が素数のとき, m は $k!$ ($k=2, 3, \dots, m-1$) では割り切れないので, ${}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ は, すべて m の倍数となる。

すると, ${}_m C_1 = m$ であることから, ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ の最大公約数 d_m は, $d_m = m$ である。

なお, $m=2$ のときは, ${}_2 C_1 = 2$ となり, $d_m = m$ を満たしている。

- (2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, 数学的帰納法よって示す。

- (i) $k=1$ のとき

$k^1 - k = 0$ は, 明らかに d_m で割り切れる。

- (ii) $k=l$ のとき

$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると,

$$\begin{aligned} (l+1)^m - (l+1) &= l^m + {}_m C_1 l^{m-1} + {}_m C_2 l^{m-2} + \cdots + {}_m C_{m-2} l^2 + ({}_m C_{m-1} - 1)l \\ &= (l^m - l) + {}_m C_1 l^{m-1} + {}_m C_2 l^{m-2} + \cdots + {}_m C_{m-2} l^2 + {}_m C_{m-1} l \end{aligned}$$

(1)より, ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ は d_m で割り切れるので, $(l+1)^m - (l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より, すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れる。

- (3) (2)より, (ii)の証明の式において, $l+1=0$ ($l=-1$) とおくと, m が偶数から,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - (-1) - {}_m C_1 + {}_m C_2 - \cdots + {}_m C_{m-2} - {}_m C_{m-1} \\ {}_m C_1 - {}_m C_2 + \cdots - {}_m C_{m-2} + {}_m C_{m-1} &= 2 \end{aligned}$$

すると, ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ の最大公約数 d_m は, 2 の約数となる。

さらに, $d_2 = 2, d_6 = 1$ から, d_m は 1 または 2 である。

[解説]

(2)までは, 文系と共通の標準的な問題です。ただ, (3)は, 上記のように 5 行程度で書いてしまいましたが, 思いつくまでに, 制限時間をかなり超えてしまいました。

2

問題のページへ

(1) 条件より, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$ なので, $A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$ となり,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-rc & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

(2) (1)より, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり, 条件から,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} &= B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - ry_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - ry_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

(3) $a-rc=t$ とおくと, $B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ となり, B^2 , B^3 , \dots と計算すると,

$$B^2 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ c(t+s) & s^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ c(t^2+ts+s^2) & s^3 \end{pmatrix}$$

すると, $B^n = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ cp_n & s^n \end{pmatrix}$, $p_n = t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + ts^{n-2} + s^{n-1} \dots \dots (*)$ と予測でき

るので, これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき 明らかに成立する。

(ii) $n=k$ のとき 成立を仮定すると,

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} t^k & 0 \\ cp_k & s^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{k+1} & 0 \\ ctp_k + cs^k & s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{k+1} & 0 \\ c(tp_k + s^k) & s^{k+1} \end{pmatrix}$$

(i)(ii)より, すべての自然数 n に対して, (*)が成立する。

そこで, $\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n \\ cp_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^n \\ c(t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1}) \end{pmatrix}$ となり,

$$z_n = t^n, \quad w_n = c(t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1})$$

(2)から, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ より $-1 < t < 1$ となり, また条件から $s > 1$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c(t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(t^n - s^n)}{t - s}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $t^n \rightarrow 0$, $s^n \rightarrow \infty$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ から, $c = 0$ である。

このとき, $-1 < a-rc < 1$ から, $-1 < a < 1$ すなわち $|a| < 1$ となる。

[解説]

行列の n 乗と数列の極限の融合問題で, 丁寧な誘導がついています。

3

問題のページへ

- (1) まず、操作(A)を 5 回行い、L に 4 色すべての玉が入っているのは、いずれかの色の玉が 2 回出て、他の色の玉は 1 回ずつ出る場合より、その確率は、

$${}^4C_1 \cdot \frac{5!}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{15}{4^3}$$

また、同様に、操作(B)を 5 回行い、R に 4 色すべての玉が入っている確率も $\frac{15}{4^3}$ から、操作(A)を 5 回行い、さらに操作(B)を 5 回行ったとき、L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 は、

$$P_1 = \frac{15}{4^3} \times \frac{15}{4^3} = \frac{225}{4096}$$

- (2) 操作(C)を 5 回行い、L に 4 色すべての玉が入っているのは、操作(A)を 5 回行い、L に 4 色すべての玉が入っている場合より、その確率 P_2 は、

$$P_2 = \frac{15}{4^3} = \frac{15}{64}$$

- (3) 操作(C)を 10 回行い、L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは、操作(A)を 10 回行い、4 色すべての玉が少なくとも 2 回ずつ出る場合である。

- (i) いずれかの色の玉が 4 回出て、他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$${}^4C_1 \cdot \frac{10!}{4!2!2!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8}$$

- (ii) 2 つの色の玉が 3 回ずつ出て、他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$${}^4C_2 \cdot \frac{10!}{3!3!2!2!} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8}$$

- (i)(ii)より、 $P_3 = \frac{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8} + \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8} = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8}$ となり、

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}{4^8} \cdot \frac{4^6}{3^2 \cdot 5^2} = \frac{63}{16}$$

[解説]

どういう訳か、最初は余事象で考えようとして深みにはまってしまいました。考え直した普通の解を上記しました。なお、(2)は(3)の誘導でしょうが、不安になってしまう設問です。

4

問題のページへ

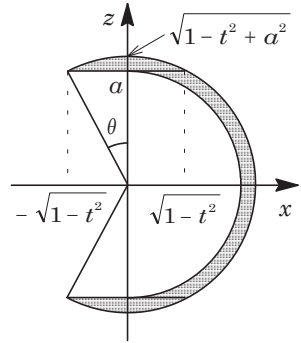
(1) 円板 D_1 を平面 $y = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切断したとき、その

切り口は、

$$x^2 + t^2 \leq 1, z = a$$

$$-\sqrt{1-t^2} \leq x \leq \sqrt{1-t^2}, z = a$$

すると、 D_1 を y 軸のまわりに 180° 回転して D_2 に重ねる間に D_1 が通る部分 E を、平面 $y = t$ で切断したときの切り口は、右図の網点部となる。



この切り口の $x \geq 0$ の部分の面積は、

$$\frac{1}{2} \pi (\sqrt{1-t^2+a^2})^2 - \frac{1}{2} \pi a^2 = \frac{1}{2} \pi (1-t^2)$$

よって、 E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分の体積 $W(a)$ は、

$$W(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \pi (1-t^2) dt = \pi \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{2}{3} \pi$$

(2) E の平面 $y = t$ での切り口において、 $x \leq 0$ の部分の面積 $S(t)$ は、右上図のように角 θ を設定すると、

$$S(t) = 2 \left\{ \frac{1}{2} (\sqrt{1-t^2+a^2})^2 \theta - \frac{1}{2} a \sqrt{1-t^2} \right\} = (1-t^2+a^2)\theta - a\sqrt{1-t^2}$$

さて、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\theta < \tan \theta = \frac{\sqrt{1-t^2}}{a}$ であることを用いると、

$$0 < S(t) < \frac{(1-t^2+a^2)\sqrt{1-t^2}}{a} - a\sqrt{1-t^2} = \frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{a} \leq \frac{1}{a}$$

ここで、 E と $\{(x, y, z) \mid x \leq 0\}$ との共通部分の体積を $U(a)$ とすると、

$$0 < U(a) < \int_{-1}^1 \frac{1}{a} dt = \frac{2}{a}$$

これより、 $a \rightarrow \infty$ のとき、 $U(a) \rightarrow 0$ となるので、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \{ W(a) + U(a) \} = \frac{2}{3} \pi$$

[解説]

東大で頻出の立体の求積問題です。題意を読み取り、軸に垂直な切り口を考えると、いう常套手段で解決できます。なお、(2)は結論を予想して不等式を立てています。

5

問題のページへ

(1) $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ のとき, $f(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} - \log(1-x)^{\frac{1}{1-x}}$ とおくと,

$$f(x) = \frac{1}{x} \log(1+x) - \frac{x-1}{x} \log(1-x) = \frac{1}{x} \{ \log(1+x) - (x-1) \log(1-x) \}$$

さらに, $g(x) = \log(1+x) - (x-1) \log(1-x)$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \log(1-x) + \frac{x-1}{1-x} = -\frac{x}{1+x} - \log(1-x)$$

$$g''(x) = -\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	...	0	...	1
$g''(x)$		-	0	+	
$g'(x)$		↘	0	↗	

これより, $g'(x) \geq 0$ となり, $g(x)$ は単調に増加し, $-1 < x < 0$ のとき $g(x) < 0$, $0 < x < 1$ のとき $g(x) > 0$ となる。

x	-1	...	0	...	1
$g'(x)$		+	0	+	
$g(x)$		↗	0	↗	

すると, $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ のとき,

$$f(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} - \log(1-x)^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{x} g(x) > 0$$

よって, $\log(1-x)^{\frac{1}{1-x}} < \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $(1-x)^{\frac{1}{1-x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ……(*)

(2) (*)より, $(1-x)^{\frac{1}{1-x}}(1+x)^{\frac{1}{1-x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{\frac{1}{1-x}}$ となり,

$$(1-x^2)^{\frac{1}{1-x}} < 1+x$$

$x = -\frac{1}{100}$ とおくと, $0.9999^{101} < 0.99$

また, (*)より, $(1-x)^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ となり,

$$1-x < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x = \frac{1}{100}$ とおくと, $0.99 < 0.9999^{100}$

以上より, $0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ が成り立つ。

[解説]

微分法の不等式への応用問題です。なお, (2)の式変形については, 結論の不等式を $(1-10^{-4})^{1+10^2} < 1-10^{-2} < (1-10^{-4})^{10^2}$ とみて方針を立てました。

6

問題のページへ

(1) $A_1P_1(t) = A_2P_2(t) = t$ より,
 $\overrightarrow{A_1P_1(t)} = t\overrightarrow{A_1B_1} = t\vec{e}_1$
 $\overrightarrow{A_2P_2(t)} = \overrightarrow{A_1A_2} + t\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{a}_1 + t\vec{e}_2$

これより, $\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} = \vec{a}_1 - t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$

条件より, $|\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}| \leq 1$ なので,

$$|\vec{a}_1 - t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)|^2 \leq 1$$

$$|\vec{a}_1|^2 - 2t\vec{a}_1 \cdot (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + t^2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 \leq 1$$

$\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ と \vec{a}_1 とのなす角度が θ より,

$$t^2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 - 2t|\vec{a}_1||\vec{e}_1 - \vec{e}_2|\cos\theta + |\vec{a}_1|^2 - 1 \leq 0 \dots\dots\dots ①$$

①を満たす $t > 0$ が存在する条件は, $\cos\theta > 0$ のもとで,

$$D/4 = |\vec{a}_1|^2|\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2 \cos^2\theta - |\vec{e}_1 - \vec{e}_2|^2(|\vec{a}_1|^2 - 1) \geq 0$$

$$|\vec{a}_1|^2(\cos^2\theta - 1) + 1 \geq 0, \sin^2\theta \leq \frac{1}{|\vec{a}_1|^2} = \frac{1}{1000^2}$$

よって, $|\sin\theta| \leq \frac{1}{1000} \dots\dots\dots ②$ となる。

(2) まず, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha = \frac{1}{1000}$ を満たす α を用いると, ②の不等式の解は,

$$0 \leq \theta \leq \alpha \dots\dots\dots ③$$

さて, $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2$, また $\theta_2 = \angle B_2A_2A_3$ より $\angle B_2A_2A_1 = \frac{\pi}{3} - \theta_2$ となる。そこ

で, \vec{a}_1 を x 軸の正の向きとしてとると,

(i) $\frac{\pi}{3} - \theta_2 \geq \theta_1$ ($\theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3}$) のとき

右図より, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi + \theta_2) = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\theta_1 + \frac{2}{3}\pi + \theta_2 = \pi - 2\theta$$

よって, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} - 2\theta$

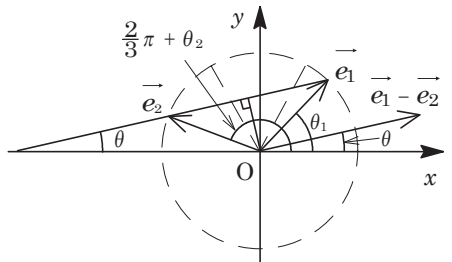
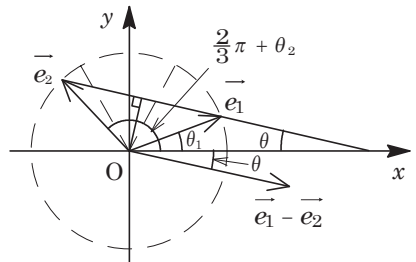
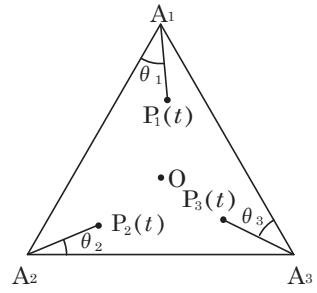
(ii) $\frac{\pi}{3} - \theta_2 \leq \theta_1$ ($\theta_1 + \theta_2 \geq \frac{\pi}{3}$) のとき

右図より, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{2}{3}\pi + \theta_2) = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\theta_1 + \frac{2}{3}\pi + \theta_2 = \pi + 2\theta$$

よって, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} + 2\theta$

(i)(ii)より, $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{3} \pm 2\theta \dots\dots\dots ④$



以上より, ③④から, $\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_1 + \theta_2 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \dots\dots\dots ⑤$

(3) 条件より, (2)の結果を用いると, ⑤と同様に,

$$\frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \dots\dots\dots ⑥, \quad \frac{\pi}{3} - 2\alpha \leq \theta_3 + \theta_1 \leq \frac{\pi}{3} + 2\alpha \dots\dots\dots ⑦$$

⑤⑥⑦より, $\frac{\pi - 6\alpha}{2} \leq \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leq \frac{\pi + 6\alpha}{2}$ となり, ⑥と合わせると,

$$\frac{\pi}{6} - 5\alpha \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{6} + 5\alpha$$

ここで, $\triangle A_1A_2A_3$ に正弦定理を適用すると,

$$\frac{1000}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2A_1O, \quad A_1O = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

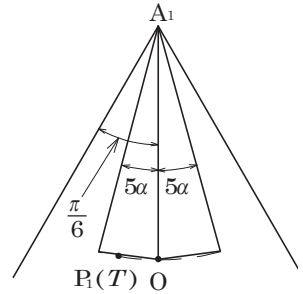
また, $A_1P_1(T) = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ より, $P_1(T)$ は, 中心 A_1 , 半径

A_1O , 中心角 $2 \times 5\alpha$ の扇形の弧上にあることより,

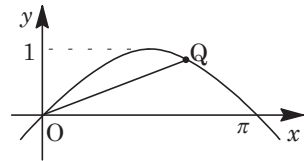
$$d(P_1(T), O) \leq \frac{1000}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin \frac{5\alpha}{2} = \frac{2000}{\sqrt{3}} \sin \frac{5\alpha}{2}$$

さて, $0 < x < \pi$ において, 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ を定義する。

すると, $f(x)$ は, 右図の $y = \sin x$ のグラフにおいて線分 OQ の傾きを表すことより, 単調に減少する。



$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \frac{5\alpha}{2}}{\frac{5\alpha}{2}}, \quad \frac{5}{2} \sin \alpha > \sin \frac{5\alpha}{2}$$



よって, $d(P_1(T), O) < \frac{2000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2} \sin \alpha = \frac{5000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{5}{\sqrt{3}} < 3$

以上より, $d(P_1(T), O) \leq 3$ が成立し, 同様にすると, $d(P_2(T), O) \leq 3$, $d(P_3(T), O) \leq 3$ も成り立つ。

[解説]

図形の総合問題ですが, 前期日程とは思えないほどの質と量です。特に(3)の設問は, アバウトに評価すると結論が示せず, ずいぶん時間がかかりました。この箇所は, やや雑な書き方になっています。なお, (1)の結論式についている絶対値は, 必要不可欠ではありません。