1　　　　解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上に点 A$(-3,\ 0)$をとり，$0°<\theta<120°$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i), (ii)を満たす 2 点 B, C を考える。

(i)　B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180°-\theta$ である。

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120°$ である。ただし△ABC は O を含むものとする。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　△OAB と△OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0°<\theta<120°$ の範囲で動かすとき，△OAB と△OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c\int_0^1 (3x^2 + 4xt)\, f'(t)\, dt$$

が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

2 つの箱 L と R, ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個, R に $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。

$\boxed{4}$

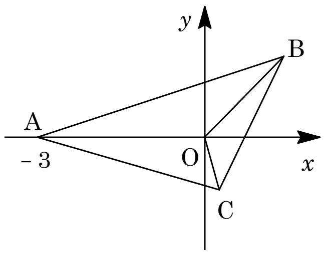
解答解説のページへ

Cを半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻$t=0$に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻$t=2\pi$まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は$1\leqq m\leqq 10$を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $0°<\theta<120°$ で，条件(i)より，B は $y>0$ の部分にあり，$OB=2$ かつ $\angle AOB=180°-\theta$ から，$B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となる。



また，条件(ii)より，C は $y<0$ の部分にあり，$OC=1$ かつ $\angle BOC=120°$，しかも△ABC は O を含むので，C は直線 OB に関して A と反対側にある。これから，$C(\cos(\theta-120°),\ \sin(\theta-120°))$ となる。

さて，$A(-3,\ 0)$ から，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta=3\sin\theta$

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left|\sin(\theta-120°)\right|=-\frac{3}{2}\sin(\theta-120°)$$

条件より，$\triangle OAB=\triangle OAC$ なので，$2\sin\theta=-\sin(\theta-120°)$

$$2\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\quad 3\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$$

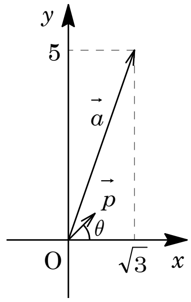
よって，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，$0°<\theta<120°$ から $\theta=30°$ である。

(2) $S=\triangle OAB+\triangle OAC$ とおくと，

$$S=3\sin\theta-\frac{3}{2}\sin(\theta-120°)=\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$
$$=\frac{3}{4}(\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta)$$

ここで，$\vec{a}=(\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$S=\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\frac{3}{4}|\vec{a}||\vec{p}|=\frac{3}{4}\sqrt{3+5^2}\cdot 1=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}=\frac{3}{2}\sqrt{7}$$



等号が成立するのは，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ が同じ向きのときである。

よって，S は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$ をとり，このとき $\sin\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ である。

［解　説］

△ABC が O を含むという条件のため，場合分けが回避できました。なお，(2)は合成でもできますが，内積利用の方が簡明です。

$\boxed{2}$　　問題のページへ

$f(x)=x^2+ax+b$ に対して,

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+a+b+1$$

また, $\displaystyle\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt=x\int_0^1(3x+4t)(2t+a)\,dt$

$$=x\int_0^1\{8t^2+(6x+4a)t+3ax\}dt=x\Big[\frac{8}{3}t^3+(3x+2a)t^2+3axt\Big]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}x+(3x+2a)x+3ax^2=3(a+1)x^2+\Big(2a+\frac{8}{3}\Big)x$$

ここで, $\displaystyle f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式であることより,

$$3(a+1)c=1\cdots\cdots\cdots①,\ \Big(2a+\frac{8}{3}\Big)c=a+2\cdots\cdots\cdots②,\ a+b+1=0\cdots\cdots\cdots③$$

①より, $c=\dfrac{1}{3(a+1)}$ となり, ②に代入すると, $\dfrac{6a+8}{3}\cdot\dfrac{1}{3(a+1)}=a+2$

$$6a+8=9(a^2+3a+2),\ 9a^2+21a+10=0,\ (3a+2)(3a+5)=0$$

(i)　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき　①より $c=1$, ③より $b=-\dfrac{1}{3}$

(ii)　$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき　①より $c=-\dfrac{1}{2}$, ③より $b=\dfrac{2}{3}$

［解　説］

定積分の計算についての基本題です。計算量も少なめです。

3

問題のページへ

(1) 箱 L, R に入っているボールの個数が，それぞれ z，$30-z$ であるとき，操作(#)を行うと，コインの表，裏の出方によって，箱 L に入っているボールの個数は次のように変化する。

(i) $0 \leqq z \leqq 15$ のとき

表が出ると $z \to z+z=2z$，裏が出ると $z \to z-z=0$

(ii) $16 \leqq z \leqq 30$ のとき

表が出ると $z \to z+(30-z)=30$，裏が出ると $z \to z-(30-z)=2z-30$

これより，$z=0$ のとき操作(#)を行っても，箱 L のボールの個数には変化がない。同様に，$z=30$ のとき操作(#)を行っても，箱 L のボールの個数には変化がない。

さて，m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とすると，コインの表，裏の出る確率が，ともに $\frac{1}{2}$ であることより，

(i) $0 \leqq x \leqq 15$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

(ii) $16 \leqq x \leqq 30$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\frac{1}{2}$

(2) (1)より，$P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)$，$P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}$ となり，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$$

これより，$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\frac{1}{3}\right\}$となり，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

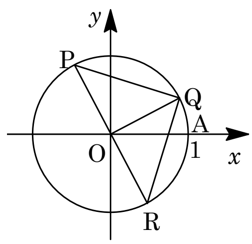
よって，$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

［解　説］

まとめると，上のような解になりますが，ここまで至る道は平坦なものではありません。最も要求されるのは，具体例を考えながら，題意を把握する読解力です。

4

問題のページへ



$A(1,\ 0)$のとき，P，Q，R の速さがそれぞれ m，1，2 であり，P，Q が反時計回りに，R が時計回りに動くことより，時刻 t での位置は，

$$P(\cos mt,\ \sin mt),\ Q(\cos t,\ \sin t),\ R(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて，△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので，PR の中点は原点であり，しかも $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は，$\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$から，

$$\cos mt=-\cos 2t \cdots\cdots\cdots ①,\quad \sin mt=\sin 2t \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ より，$\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり，$\cos 3t=0 \cdots\cdots\cdots ③$

③から，$0\leqq t\leqq 2\pi$ より，$3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり，

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき，①②より，

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\quad m=4+12k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\quad \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0\ \text{より,}\quad \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\quad m=4k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv)　$t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+2k\right)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v)　$t=\frac{3}{2}\pi$ のとき

$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1$，$\sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0$ より，$\frac{3}{2}m\pi=2k\pi$，$m=\frac{4}{3}k$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(vi)　$t=\frac{11}{6}\pi$ のとき

$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$，$m=\frac{6}{11}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{11}$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

［解　説］

t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。