1

解答解説のページへ

　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として $90°$ 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

3

解答解説のページへ

2 つの箱 L と R, ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個, R に $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき, $P_{4n}(6)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において, 4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

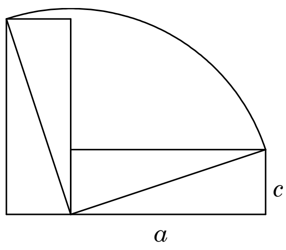
(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して, 線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り, 平面 L に垂直な平面を M とするとき, 平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　立体 V の回転軸に垂直な断面は，右図のように，半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円に，直角をはさむ 2 辺の長さが a と c の直角三角形を 2 個合わせたものである。

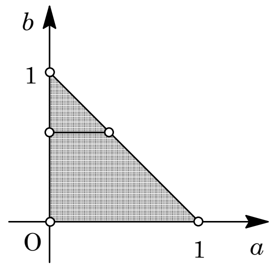


これより，V の体積 W は，

$$W=\left\{\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}ac\right\}b$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a^2+c^2)+abc\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$c=1-a-b>0$ から，$a+b<1$ となり，①より，



$$W=\frac{1}{4}\pi b\{(a+c)^2-2ac\}+abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a+c)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)ab(1-a-b)$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\{-a^2+(1-b)a\}$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2+\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\left\{\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-\frac{(1-b)^2}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②において，いったん b の値を固定して $W=f(a)$ とおくと，$0<a<1-b$ より，

$$f\left(\frac{1-b}{2}\right)\leqq f(a)<f(0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\cdot\frac{(1-b)^2}{4}=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2$

$$f(0)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2$$

さらに，$g(b)=b(1-b)^2$ とおくと，

$$g'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$

$$=(1-b)(1-3b)$$

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

よって，$0<b<1$ のとき $0<g(b)\leqq\frac{4}{27}\cdots\cdots\cdots④$

すると，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)g(b)>0$，$f(0)=\frac{1}{4}\pi g(b)\leqq\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4}{27}=\frac{1}{27}\pi$

以上より，③④から，$0<W<\frac{1}{27}\pi$ である。

［解 説］

いったん 1 文字を固定することにより，とりうる値の範囲を求めていくという東大頻出の問題です。(2)において，W のとりうる範囲を，b を消去して $a+c$ と ac をもとに考えることもできますが，計算がやや煩雑になります。

2

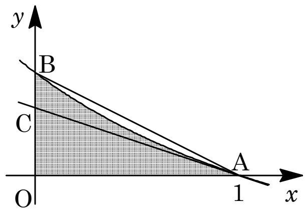
問題のページへ

(1)　自然数 k に対して，$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$f'(x)=-\frac{k+1}{(k+x)^2}<0,\ \ f''(x)=\frac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，曲線 $y=f(x)$ は下に凸となる。

ここで，$y=f(x)$ と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ とおく。



また，点 A における接線は，

$$y=-\frac{k+1}{(k+1)^2}(x-1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$$

この接線と y 軸の交点を C とすると，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ となる。

そこで，面積を比較して，$\triangle\mathrm{OAC}<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\triangle\mathrm{OAB}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$

$$=-1+(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}=-1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

すると，①より，$\dfrac{1}{2(k+1)}<-1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}<\dfrac{1}{2k}$ となり，

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②において，$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると，

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)=-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

$$=-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}+\log m-\log n=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

よって，③より，$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$

［解　説］

凸関数のグラフの性質を用いて，(1)の不等式の証明をしています。$f(x)$ のグラフを描くと，三角形との関係が見えてきます。(2)も，一癖ある設問です。

３

問題のページへ

(1)　箱 L, R に入っているボールの個数が，それぞれ z，$30-z$ であるとき，操作(#)を行うと，コインの表，裏の出方によって，箱 L に入っているボールの個数は次のように変化する。

(i)　$0\leqq z\leqq 15$ のとき

表が出ると $z\to z+z=2z$，裏が出ると $z\to z-z=0$

(ii)　$16\leqq z\leqq 30$ のとき

表が出ると $z\to z+(30-z)=30$，裏が出ると $z\to z-(30-z)=2z-30$

これより，$z=0$ のとき操作(#)を行っても，箱 L のボールの個数には変化がない。同様に，$z=30$ のとき操作(#)を行っても，箱 L のボールの個数には変化がない。

さて，m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とすると，コインの表，裏の出る確率が，ともに $\dfrac{1}{2}$ であることより，

(i)　$0\leqq x\leqq 15$ のとき　$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

(ii)　$16\leqq x\leqq 30$ のとき　$P_m(x)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2}$

(2)　(1)より，$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{2}P_{2n-1}(20)$，$P_{2n-1}(20)=\dfrac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$$

これより，$P_{2n}(10)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$ となり，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

よって，$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}$

(3)　(2)と同様にして，

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n-2}(24)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)+\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4n-4}(6)+\frac{3}{16}$$

これより，$P_{4n}(6)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{16}\left\{P_{4n-4}(6)-\dfrac{1}{5}\right\}$ となり，$P_4(6)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{16}$ から，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left\{P_4(6)-\frac{1}{5}\right\}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{n}$$

よって，$P_{4n}(6)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n}$

［解　説］

まとめると，上のような解になりますが，ここまで至る道は平坦なものではありません。最も要求されるのは，具体例を考えながら，題意を把握する読解力です。

4

問題のページへ

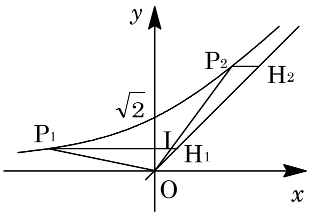
(1)　$C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)\cdots\cdots(*)$に対して，

$$y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)>0,\quad y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+8-x^2}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}=\frac{4}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}>0$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)=\infty$であり，

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}=0$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=0$



よって，曲線Cは下に凸であり，x軸および直線$y=x$を漸近線としてもつ。

さて，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$から，$H_1(y_1,\ y_1)$，$H_2(y_2,\ y_2)$となり，

$$\triangle OP_1H_1=\frac{1}{2}(y_1-x_1)y_1=\frac{1}{8}\left(-x_1+\sqrt{{x_1}^2+8}\right)\left(x_1+\sqrt{{x_1}^2+8}\right)=1$$

同様に，$\triangle OP_2H_2=1$となるので，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$である。

(2)　2直線P_1H_1とOP_2の交点をIとおくとき，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$から，

$$\triangle OP_1H_1-\triangle OIH_1=\triangle OP_2H_2-\triangle OIH_1$$

これより，Cと線分P_1O，P_2Oとで囲まれる図形の面積Sは，Cと線分P_1H_1，P_2H_2，および直線$y=x$とで囲まれる図形の面積に等しい。

ここで，$(*)$より，$2y=x+\sqrt{x^2+8}$から，$(2y-x)^2=x^2+8$

$$y^2-yx=2,\quad x=y-\frac{2}{y}$$

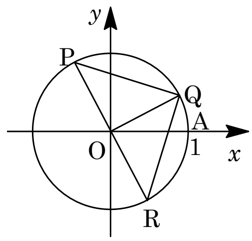
よって，$\displaystyle S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=2\Big[\log y\Big]_{y_1}^{y_2}=2\log\frac{y_2}{y_1}$

［解　説］

曲線の概形を描くのに，時間がかかります。なお，Sはxで積分することによっても求められます。ただ，(1)を利用して，置換積分を実行しても，3倍程度の記述量が必要です。最初はこの解法でしたが，書き直しました。

5

問題のページへ



$A(1,\ 0)$のとき，P，Q，R の速さがそれぞれ m，1，2 であり，P，Q が反時計回りに，R が時計回りに動くことより，時刻 t での位置は，

$$P(\cos mt,\ \sin mt),\ Q(\cos t,\ \sin t),\ R(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて，△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので，PR の中点は原点であり，しかも $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は，$\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$から，

$$\cos mt=-\cos 2t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \sin mt=\sin 2t\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ より，$\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり，$\cos 3t=0\ \cdots\cdots\cdots③$

③から，$0\leqq t\leqq 2\pi$ より，$3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり，

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき，①②より，

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\quad m=4+12k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\quad \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0\ \text{より,}\quad \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\quad m=4k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv)　$t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\quad \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+2k\right)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v)　$t=\frac{3}{2}\pi$ のとき

$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1$, $\sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0$ より，$\frac{3}{2}m\pi=2k\pi$, $m=\frac{4}{3}k$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$, 8

(vi)　$t=\frac{11}{6}\pi$ のとき

$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\quad m=\frac{6}{11}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

［解　説］

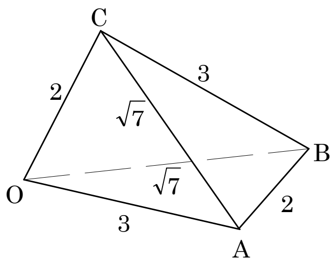
t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

6

問題のページへ

(1)　四面体 OABC の 4 つの面がすべて合同より,

$$\mathrm{OA}=\mathrm{CB}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{CA}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=\mathrm{OC}=2$$



まず, 3 点 O, A, B を含む平面 L を xy 平面として座標系を設定する。

ここで, △OAB に余弦定理を適用して,

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

これより, $\angle\mathrm{OAB}=60^\circ$ となる。そこで, O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(3,\ 0,\ 0)$ とおくと, B$(2,\ \sqrt{3},\ 0)$ である。

さらに, $z>0$ として, C$(x,\ y,\ z)$ とおくと,

$$x^2+y^2+z^2=4\ \cdots\cdots\cdots①,\ (x-3)^2+y^2+z^2=7\ \cdots\cdots\cdots②$$

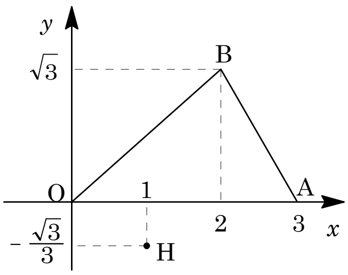
$$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=9\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より, $-6x+9+4=7$, $x=1$

①③より, $-4x+4-2\sqrt{3}y+3+4=9$ となり, $x=1$ を代入すると, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

これらの値を①に代入して, $1+\dfrac{1}{3}+z^2=4$, $z=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

よって, C$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)$となり, C より L におろした垂線の足 H は, H$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$となる。



そこで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,

$$3k+2l=1,\ \sqrt{3}l=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

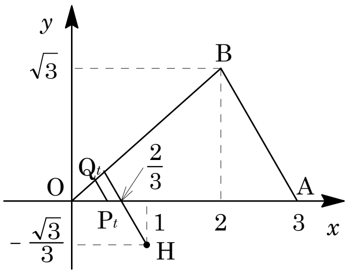
よって, $l=-\dfrac{1}{3}$, $k=\dfrac{5}{9}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　直線 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ が点 H を通るとき, P_t の x 座標は, $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan30^\circ=\dfrac{2}{3}$

これより, $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{2}{3},\ 0,\ 0\right)$となり, $\mathrm{OP}_t:\mathrm{P}_t\mathrm{A}=t:1-t$ から, $t=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ となる。

このとき, $\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{9}\mathrm{AB}=\dfrac{4}{9}$ から,

$$\triangle\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{4}{27}\sqrt{6}$$



さて, 2 点 P_t, Q_t を通り, 平面 L に垂直な平面 M による四面体の切り口を, P_t, Q_t の位置で場合分けをして考える。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき

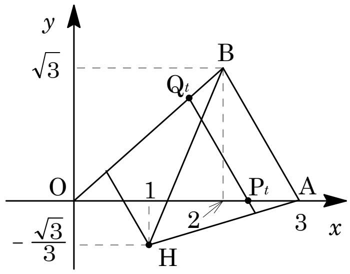
平面 M と直線 OC との交点を R_t とおくと，切り口は三角形 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ となる。

この三角形は，$\triangle\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}\mathrm{C}$ に相似であり，その相似比は，$t:\dfrac{2}{9}=9t:2$ であることより，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\left(\frac{9t}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{27}\sqrt{6}=3\sqrt{6}t^2$$

(ii)　$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき

平面 M と直線 CA, CB との交点を，それぞれ S_t，T_t とおくと，切り口は台形 $\mathrm{S}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{T}_t$ となり，これは，$\triangle\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ から $\triangle\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t\mathrm{R}_t$ を除いた図形である。



また，$\triangle\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t\mathrm{R}_t$ は，$t=1$ のときの $\triangle\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$，すなわち $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1=3\sqrt{6}$ に相似であり，その相似比は，$t-\dfrac{2}{9}:1-\dfrac{2}{9}=9t-2:7$ である。これから，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=3\sqrt{6}t^2-\left(\frac{9t-2}{7}\right)^2\cdot3\sqrt{6}=-\frac{12\sqrt{6}}{49}(8t^2-9t+1)$$

(3)　(2)より，$S(t)$ は $0<t<1$ で連続であり，$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき単調に増加する。

また，$\dfrac{2}{9}<t<1$ のとき，

$$S(t)=-\frac{12\sqrt{6}}{49}\left\{8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2-\frac{49}{32}\right\}=-\frac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{3}{8}\sqrt{6}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{9}{16}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$ をとる。

［解　説］

$\angle\mathrm{OAB}=60^\circ$ に注目して，座標系を設定しました。なお，(ii)においても，OC の延長と平面 M との交点を R_t としています。