1

解答解説のページへ

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

2

解答解説のページへ

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

3　　解答解説のページへ

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p\ ,\ \ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[\,a,\ b\,;c\,]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[\,a,\ b\,;c\,]$ に対して

$$w([\,a,\ b\,;c\,]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([\,a,\ b\,;c\,]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([\,a,\ b\,;c\,]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p = q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([\,a,\ b\,;c\,]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

1

問題のページへ

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ より，

$$a+b+c+d=1\cdots\cdots\cdots①,\ \ -a+b-c+d=-1\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\displaystyle\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$ より，$\displaystyle 2\int_0^1(bx^2+d)dx=1$ となり，

$$2\left(\frac{b}{3}+d\right)=1,\ \ 2b+6d=3\cdots\cdots\cdots③$$

①＋②より，$b+d=0$ となり，③と合わせて，$b=-\dfrac{3}{4}$，$d=\dfrac{3}{4}$

①－②より，$a+c=1$，$c=1-a$

このとき，$f(x)=ax^3-\dfrac{3}{4}x^2+(1-a)x+\dfrac{3}{4}$，$f'(x)=3ax^2-\dfrac{3}{2}x+(1-a)$ から，

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left\{f''(x)\right\}^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx\\&=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=12a^2\left(\frac{1}{8}+1\right)-9a\left(\frac{1}{4}-1\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right)\\&=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}\end{aligned}$$

これより，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき，すなわち $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}$ のとき，I の値は最小となり，最小値は $\dfrac{81}{32}$ である。

［解　説］

定積分の計算問題からスタートです。計算量は少なめです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle\sqrt{2}\rangle=\sqrt{2}-1$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle=\sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n=\sqrt{2}-1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1=\langle a\rangle=a\cdots\cdots\cdots①,\ \ a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=a\cdots\cdots\cdots②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n=a$ が成り立つ。

さて，$a\geqq\frac{1}{3}$ のとき，①より $\frac{1}{3}\leqq a<1$ であり，$1<\frac{1}{a}\leqq 3$ となる。

(i)　$1<\frac{1}{a}<2\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-1$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-1=a$，$a^2+a-1=0$

$\frac{1}{2}<a<1$ から，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\frac{1}{a}=2\left(a=\frac{1}{2}\right)$ のとき　$a_2=\langle 2\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(iii)　$2<\frac{1}{a}<3\left(\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-2$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-2=a$，$a^2+2a-1=0$

$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ から，$a=-1+\sqrt{2}$

(iv)　$\frac{1}{a}=3\left(a=\frac{1}{3}\right)$ のとき　$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

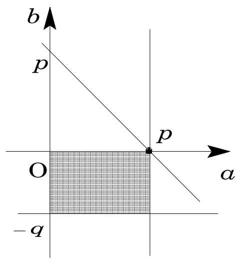
［解 説］

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントになっています。

3

問題のページへ

(1) 正の整数 p, q, 整数 a, b, c に対して，$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ とする。

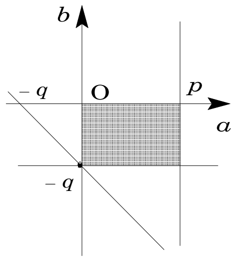


まず，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ ……①であるとき，

$$p-q-(a+b) = -q,\quad a+b = p$$

よって，①を満たす a, b は，$(a,\ b) = (p,\ 0)$ のみである。

すると，$0 \leqq c \leqq p$ を満たす c は $p+1$ 個存在するので，①となるものの個数は $p+1$ である。



次に，$w([a,\ b\,;c]) = p$ ……②であるとき，

$$p-q-(a+b) = p,\quad a+b = -q$$

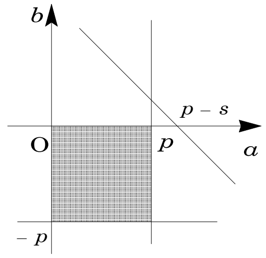
よって，②を満たす a, b は，$(a,\ b) = (0,\ -q)$ のみである。

すると，$-q \leqq c \leqq 0$ を満たす c は $q+1$ 個存在するので，②となるものの個数は $q+1$ である。

(2) s を $s \leqq p$ である整数とし，$q = p$ のときを考える。

$w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ ……③に対して，

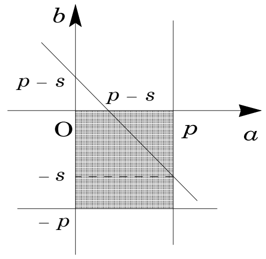
$$p-p-(a+b) = -p+s,\quad a+b = p-s$$



(i) $p-s > p\ (s < 0)$ のとき

③を満たす a, b は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(ii) $p-s \leqq p\ (s \geqq 0)$ のとき



③を満たす a, b は $(a,\ b) = (p-s,\ 0)$，$(p-s+1,\ -1)$，$(p-s+2,\ -2)$，…，$(p,\ -s)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $p-s+1$ 個，$p-s+3$ 個，$p-s+5$ 個，…，$p+s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2} \times (s+1) = (p+1)(s+1)$$

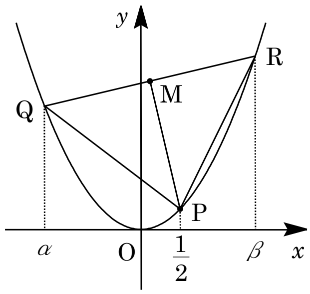
よって，③となるものの個数は，$(p+1)(s+1)$ である。

［解 説］

東大らしい読解力が要求される問題です。上の解答例では，与えられた条件を満たす場合の数を，格子点の個数に対応させて考えています。なお，(2)の(i)のときは，当たり前すぎて，うっかり忘れてしまいそうです。

4

問題のページへ



点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，$\triangle\mathrm{PQR}$ が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$ から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心を $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\ \ Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$，③より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\ \ \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥$

ところで，α，β は，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，β を解とする t に関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$Y>\dfrac{3}{2}\left(X-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\ \ y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

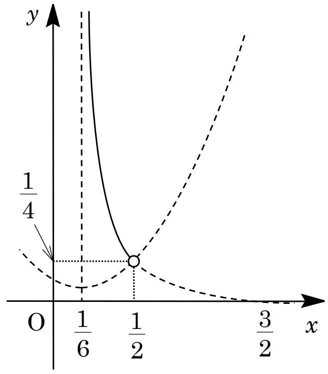
さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は$x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$は除く。



［解　説］

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。なお，問題文が「軌跡を図示せよ」となっていないのは，分数関数のグラフが数Ⅲであることに配慮したためでしょうか。