1

解答解説のページへ

座標平面において，点P(0, 1)を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2)　$0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a) = \displaystyle\int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2}\, dt$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a \to +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。

5

解答解説のページへ

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p\ ,\ \ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して

$$w([a,\ b\,;c]) = p - q - (a+b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

(1)　$x,\ y$ を実数とし, $x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

　$x>0$ かつ, 実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して,

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

　を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

　$0\leqq x\leqq 1$ かつ, $0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して,

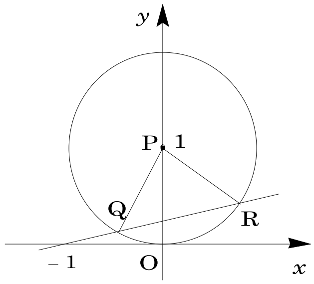
$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

　が成り立つ。

V の体積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$0<a<1$ のとき，点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ から直線 $y=a(x+1)$，すなわち $ax-y+a=0$ に下ろした垂線の長さ h は,

$$h=\frac{|-1+a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\mathrm{QR}=2\sqrt{1-h^2}$ となるので，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S(a)$ は, $(*)$から,

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-h^2}\cdot h=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

(2)　(1)より，$S(a)=h\sqrt{1-h^2}=\sqrt{h^2-h^4}$

ここで，$0<h<1$ として，$f(h)=h^2-h^4$ とおくと,

$$f'(h)=2h-4h^3=2h(1-2h^2)$$

すると，$f(h)$ の増減は右表のようになり,

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$	0	$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗		↘	

$f(h)$ は $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値をとり，このとき $S(a)$ も最大となる。

すなわち，$S(a)$ が最大となる a は, $(*)$から，$\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり,

$$2(1-a)^2=a^2+1,\quad a^2-4a+1=0$$

$0<a<1$ から，$a=2-\sqrt{3}$

［解　説］

円と直線に関する基本問題です。なお, (2)の $f(h)$ は複 2 次式ですので，微分するまでもありませんでした。

2

問題のページへ

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle\sqrt{2}\,\rangle=\sqrt{2}-1$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle=\sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n=\sqrt{2}-1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1=\langle a\rangle=a\cdots\cdots\cdots①,\quad a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=a\cdots\cdots\cdots②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n=a$ が成り立つ。

さて，$a\geqq\frac{1}{3}$ のとき，①より $\frac{1}{3}\leqq a<1$ であり，$1<\frac{1}{a}\leqq 3$ となる。

(i)　$1<\frac{1}{a}<2\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-1$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-1=a$，$a^2+a-1=0$

$\frac{1}{2}<a<1$ から，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\frac{1}{a}=2\left(a=\frac{1}{2}\right)$ のとき　$a_2=\langle 2\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(iii)　$2<\frac{1}{a}<3\left(\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-2$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-2=a$，$a^2+2a-1=0$

$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ から，$a=-1+\sqrt{2}$

(iv)　$\frac{1}{a}=3\left(a=\frac{1}{3}\right)$ のとき　$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(3)　p を整数, q を自然数として，有理数 $a=\frac{p}{q}$ とおく。

まず, p を q で割り，その余りを r_1 とすると，

$$a_1=\left\langle\frac{p}{q}\right\rangle=\frac{r_1}{q}\quad(0\leqq r_1<q)$$

ここで，$r_1=0$ のときは $a_1=0$ となり，以下, $n\geqq 2$ で $a_n=0$ である。

次に，$r_1\neq 0$ のときは, q を r_1 で割り，その余りを r_2 とすると，

$$a_2=\left\langle\frac{q}{r_1}\right\rangle=\frac{r_2}{r_1}\quad(0\leqq r_2<r_1)$$

ここで，$r_2=0$ のときは $a_2=0$ となり，以下, $n\geqq 3$ で $a_n=0$ である。

さらに，$r_2\neq 0$ のときは，r_1 を r_2 で割り，その余りを r_3 とすると，

$$a_3=\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle=\frac{r_3}{r_2}\quad (0\leqq r_3<r_2)$$

余りが 0 でないとき，同様に，この操作を繰り返すと，得られる数列$\{r_n\}$は，

$$q>r_1>r_2>r_3>\cdots\geqq 0$$

すなわち，単調に減少する整数の数列が得られる。

すると，ある整数$n=n_0\leqq q$において，$r_{n_0}=0$となる。これより，$a_{n_0}=0$となり，以下，$n\geqq n_0+1$で$a_n=0$である。

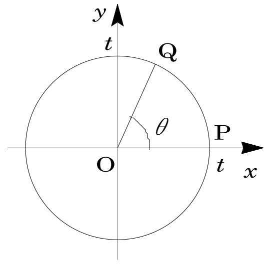
したがって，q以上の自然数nに対して，$a_n=0$となる。

［解 説］

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントです。(3)では，正の整数が減少していくと，いつかは 0 になるという事実を利用しています。

3

問題のページへ



(1)　動径 OQ を, x 軸の正の部分から反時計回りに測った角を θ とすると，$t\theta = L$ より，$\theta = \dfrac{L}{t}$ となるので，

$$u(t) = t\cos\frac{L}{t},\quad v(t) = t\sin\frac{L}{t}$$

(2)　$u'(t) = \cos\dfrac{L}{t} - t\left(-\dfrac{L}{t^2}\right)\sin\dfrac{L}{t} = \cos\dfrac{L}{t} + \dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}$

$$v'(t) = \sin\frac{L}{t} + t\left(-\frac{L}{t^2}\right)\cos\frac{L}{t} = \sin\frac{L}{t} - \frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}$$

すると，$\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2 = \left(\cos\dfrac{L}{t} + \dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}\right)^2 + \left(\sin\dfrac{L}{t} - \dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}\right)^2 = 1 + \dfrac{L^2}{t^2}$

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2}\,dt = \int_a^1 \sqrt{1 + \frac{L^2}{t^2}}\,dt = \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t}\,dt$$

ここで，$\sqrt{t^2 + L^2} = s$ とおくと，$t^2 + L^2 = s^2$ から，$2tdt = 2sds$ となる。

また，$\alpha = \sqrt{a^2 + L^2}$，$\beta = \sqrt{1 + L^2}$ とすると，

$$f(a) = \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t^2}\cdot t\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{s}{s^2 - L^2}\cdot s\,ds = \int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{L^2}{s^2 - L^2}\right)ds$$

$$= \beta - \alpha + \frac{L}{2}\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{s - L} - \frac{1}{s + L}\right)ds = \beta - \alpha + \frac{L}{2}\Big[\log\frac{s - L}{s + L}\Big]_\alpha^\beta$$

$$= \beta - \alpha + \frac{L}{2}\log\frac{\beta - L}{\beta + L} - \frac{L}{2}\log\frac{\alpha - L}{\alpha + L} = \beta - \alpha + \frac{L}{2}\log\left(\frac{\beta - L}{\beta + L}\cdot\frac{\alpha + L}{\alpha - L}\right)$$

ここで，$\dfrac{\beta - L}{\beta + L}\cdot\dfrac{\alpha + L}{\alpha - L} = \dfrac{\sqrt{1 + L^2} - L}{\sqrt{1 + L^2} + L}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{a^2 + L^2} - L} = \dfrac{\left(\sqrt{a^2 + L^2} + L\right)^2}{a^2\left(\sqrt{1 + L^2} + L\right)^2}$ から，

$$f(a) = \sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} + L\log\frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{a\left(\sqrt{1 + L^2} + L\right)}$$

(3)　(2)より，$f(a) = \sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} + L\log\dfrac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{1 + L^2} + L} - L\log a$ となり，

$$\frac{1}{\log a}\left(\sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2}\right) \to 0,\quad \frac{1}{\log a}\log\frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{1 + L^2} + L} \to 0\quad (a \to +0)$$

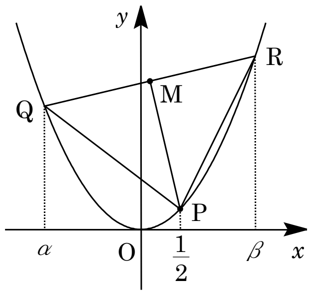
したがって，$\displaystyle\lim_{a \to +0}\frac{f(a)}{\log a} = -L$

［解 説］

(2)の定積分の計算では，最初，$t = L\tan\varphi$ と置き換えをしましたが，かなりの量となり，そこで，方針を変更した結果，上の解答例となったわけです。

4

問題のページへ



点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を$\mathrm{G}(X,\ Y)$とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より$\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}$ ……④，③より$\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}$ ……⑤

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}$ ………⑥

ところで，α，βは，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，βを解とするtに関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$Y>\dfrac{3}{2}\left(X-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}$ ………⑧

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

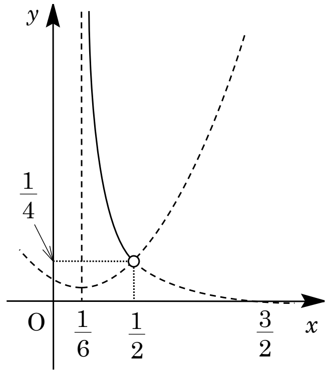
$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots⑧'$$

さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$



この方程式の実数解は$x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$は除く。

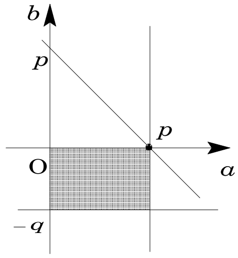
［解　説］

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　正の整数 p, q, 整数 a, b, c に対して，$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ とする。

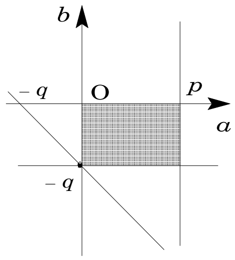


まず，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ ……①であるとき，

$$p - q - (a + b) = -q\,,\ \ a + b = p$$

よって，①を満たす a, b は，$(a,\ b) = (p,\ 0)$ のみである。

すると，$0 \leqq c \leqq p$ を満たす c は $p+1$ 個存在するので，①となるものの個数は $p+1$ である。



次に，$w([a,\ b\,;c]) = p$ ……②であるとき，

$$p - q - (a + b) = p\,,\ \ a + b = -q$$

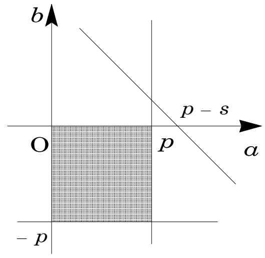
よって，②を満たす a, b は，$(a,\ b) = (0,\ -q)$ のみである。

すると，$-q \leqq c \leqq 0$ を満たす c は $q+1$ 個存在するので，②となるものの個数は $q+1$ である。

(2)　s を整数とし，$q = p$ のときを考える。

$w([a,\ b\,;c]) = -p + s$ ……③に対して，

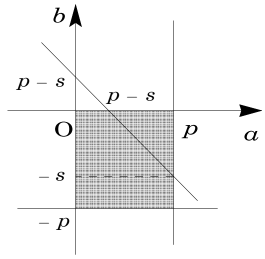
$$p - p - (a + b) = -p + s\,,\ \ a + b = p - s$$



(i)　$p - s > p$ $(s < 0)$ のとき

③を満たす a, b は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(ii)　$0 \leqq p - s \leqq p$ $(0 \leqq s \leqq p)$ のとき



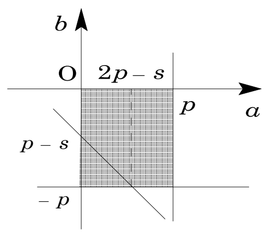
③を満たす a, b は $(a,\ b) = (p-s,\ 0)$, $(p-s+1,\ -1)$, $(p-s+2,\ -2)$, …, $(p,\ -s)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $p-s+1$ 個，$p-s+3$ 個，$p-s+5$ 個，…，$p+s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2} \times (s+1) = (p+1)(s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(s+1)$ である。

(iii)　$-p \leqq p - s < 0$ $(p < s \leqq 2p)$ のとき



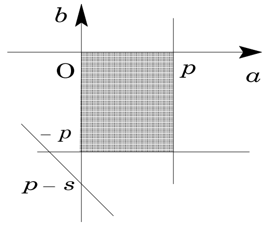
③を満たす a, b は $(a,\ b) = (0,\ p-s)$, $(1,\ p-s-1)$, $(2,\ p-s-2)$, …, $(2p-s,\ -p)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $-p+s+1$ 個，$-p+s+3$ 個，$-p+s+5$ 個，…，$3p-s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(-p+s+1)+(3p-s+1)}{2} \times (2p-s+1) = (p+1)(2p-s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(2p-s+1)$ である。

(iv) $p-s<-p\ (s>2p)$ のとき



③を満たす a，b は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数は，(2)より，

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)$$
$$=(p+1)\cdot\frac{1+(p+1)}{2}\cdot(p+1)+(p+1)\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p$$
$$=\frac{1}{2}(p+1)^2(p+2)+\frac{1}{2}p(p+1)^2=(p+1)^3$$

［解　説］

東大らしい読解力が要求される問題です。上の解答例では，与えられた条件を満たす場合の数を，格子点の個数に対応させて考えています。なお，(3)は(2)の結果を利用しましたが，直接的には，$\displaystyle\sum_{b=-p}^{0}\left(\sum_{a=0}^{p}(a-b+1)\right)$を計算すると求められます。

6

問題のページへ

(1) 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ に対し，$0\leqq t\leqq 1$ における最大値を M,

最小値を m とおくと，$x>0$ から，

(i) $-\dfrac{y}{2x}\leqq 0\ (y\geqq 0)$ のとき　$M-m=f(1)-f(0)=x+y$

(ii) $0\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq \dfrac{1}{2}\ (-x\leqq y\leqq 0)$ のとき　$M-m=f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x}$

(iii) $\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq 1\ (-2x\leqq y\leqq -x)$ のとき　$M-m=f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x}$

(iv) $-\dfrac{y}{2x}\geqq 1\ (y\leqq -2x)$ のとき　$M-m=f(0)-f(1)=-x-y$

(2) $0\leqq t\leqq 1$ のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$，すなわち

$$0\leqq f(t)+z\leqq 1$$

が成り立つ z の存在する条件は，$M-m\leqq 1$ である。$x>0$ を考え合わせ, (1)より,

(i) $y\geqq 0$ のとき

$M-m=x+y\leqq 1$ より，$y\leqq -x+1$

(ii) $-x\leqq y\leqq 0$ のとき

$M-m=x+y+\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$ より，$4x^2+4xy+y^2\leqq 4x$，$(2x+y)^2-4x\leqq 0$ となり,

$$(2x+y+2\sqrt{x})(2x+y-2\sqrt{x})\leqq 0$$
$$-2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x}$$

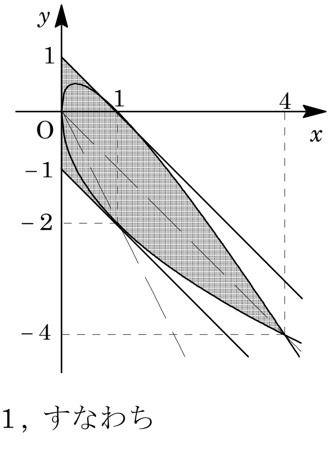
(iii) $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき

$M-m=\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$ より，$y^2-4x\leqq 0$ となり,

$(y+2\sqrt{x})(y-2\sqrt{x})\leqq 0$，$-2\sqrt{x}\leqq y\leqq 2\sqrt{x}$

(iv) $y\leqq -2x$ のとき

$M-m=-x-y\leqq 1$ より，$y\geqq -x-1$



(i)～(iv)より, S の概形は右図の網点部となる。

ただし, y 軸以外の境界線は含む。

(3) $0\leqq t\leqq 1$ のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$，すなわち

$$0\leqq f(t)+z\leqq 1$$

が成り立つ x, y, z の条件を求めるには, (1)より，$m\leqq f(t)\leqq M$ なので,

$$m+z\leqq f(t)+z\leqq M+z$$

これより，求める条件は，$0\leqq m+z$ かつ $M+z\leqq 1$ から,

$$-m\leqq z\leqq 1-M$$

まず，$0<x\leqq 1$ の場合については,

(i)　$y \geqq 0$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1-M$ から，$0 \leqq z \leqq 1-x-y$

(ii)　$-x \leqq y \leqq 0$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1-M$ から，$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1-x-y$

(iii)　$-2x \leqq y \leqq -x$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1-M$ から，$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1$

(iv)　$y \leqq -2x$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1-M$ から，$-x-y \leqq z \leqq 1$

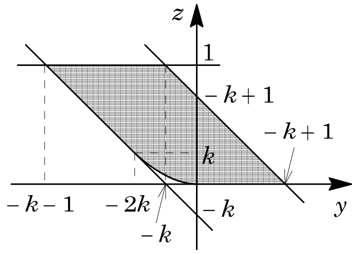
さて，(i)～(iv)の条件を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる座標空間内の領域 V を，平面$x=k$ $(0<k \leqq 1)$で切断したときにできる断面は，

(i)　$y \geqq 0$ のとき　$0 \leqq z \leqq 1-k-y$

(ii)　$-k \leqq y \leqq 0$ のとき　$\dfrac{y^2}{4k} \leqq z \leqq 1-k-y$

(iii)　$-2k \leqq y \leqq -k$ のとき　$\dfrac{y^2}{4k} \leqq z \leqq 1$

(iv)　$y \leqq -2x$ のとき　$-k-y \leqq z \leqq 1$



そこで，(i)～(iv)で表される断面を，平面$x=k$上で図示すると右上図のようになる。この断面の面積を$T(k)$とおくと，

$$T(k)=\frac{1+2}{2}\times 1-\frac{k+1}{2}(-k+1)-\int_{-2k}^{0}\frac{y^2}{4k}dy=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(1-k^2)-\frac{1}{12k}\Big[\,y^3\,\Big]_{-2k}^{0}$$

$$=1+\frac{1}{2}k^2-\frac{2}{3}k^2=1-\frac{1}{6}k^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

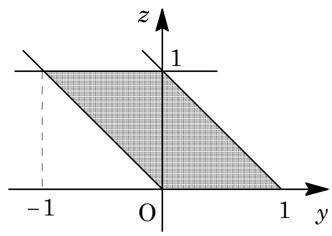
次に，$x=0$の場合については，$f(t)=yt$となり，

(v)　$y \geqq 0$ のとき

$m=0$，$M=y$ より，$0 \leqq z \leqq 1-y$

(vi)　$y \leqq 0$ のとき

$m=y$，$M=0$ より，$-y \leqq z \leqq 1$



これより，$T(0)=1$となり，この場合も(＊)は成立する。

したがって，領域Vの体積は，

$$\int_0^1 T(k)\,dk=\int_0^1\left(1-\frac{1}{6}k^2\right)dk=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$$

［解　説］

(2)で，不等式で表された領域を図示するときに必要な，共有点の座標計算や曲線の概形についての記述は，解答例が量的に拡大しすぎるために省いています。しかし，それも「焼け石に水」のようなボリュームでした。