1

解答解説のページへ

座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, xのとりうる最大の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

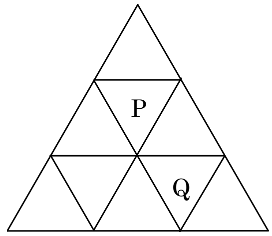
実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



4

解答解説のページへ

座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。$s,\ t$ は実数とし $t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を $l_1,\ l_2$ とする。

(1) $l_1,\ l_2$ の方程式を求めよ。

(2) a を正の実数とする。放物線 C と直線 $l_1,\ l_2$ で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

1

問題のページへ

条件式 $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$ を y についてまとめると,

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

y の実数条件から, x のとりうる範囲が決まり,

$$D=(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73\geqq 0$$

これより，$8x^2+8x-73\leqq 0$ となり，$\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

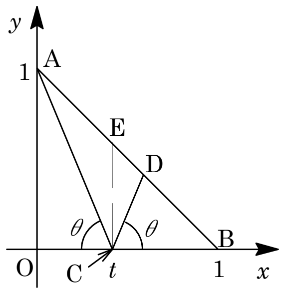
よって, x のとりうる最大の値は，$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ である。

［解 説］

x と y が等式で関係づけられたときの x のとりうる範囲を求める基本題です。なお, 現在は範囲外ですが，与えられた式は楕円を表します。

2

問題のページへ



まず，直線 AB の方程式は，$y=1-x$ ………①

そこで，点 C を通り，x 軸に垂直な直線と直線 AB との交点を E とすると，

$$CE=1-t$$

また，$\angle ACO=\angle BCD=\theta$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ より，直線 CD の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\text{ ………②}$$

①②を連立して，$1-x=\dfrac{1}{t}(x-t)$ から，$t-tx=x-t$，$(t+1)x=2t$

よって，点 D の x 座標は，$x=\dfrac{2t}{t+1}$ となる。

すると，△ACD の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{t+1}=\dfrac{-t^2+t}{t+1}$

ここで，$u=t+1$ とおくと，$0<t<1$ から $1<u<2$ となり，

$$S=\frac{-(u-1)^2+u-1}{u}=\frac{-u^2+3u-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

さて，相加平均と相乗平均の関係より，$u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{2}$

等号は，$u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ のとき成立し，これは $1<u<2$ を満たすことより，

$$S=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)\leqq 3-2\sqrt{2}$$

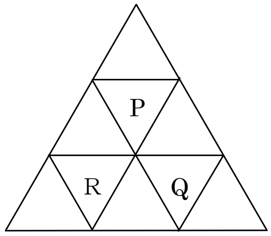
以上より，△ACD の面積の最大値は，$3-2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

分数関数の最大・最小は，微分法を利用するのが一般的ですが，範囲外です。このようなときは，次に相加平均と相乗平均の関係が使えないかと考えます。

3

問題のページへ



まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P, Q, R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i)　部屋 P にあるとき　P→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋 Q にあるとき　Q→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

(iii) 部屋 R にあるとき　R→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\ \ q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Big(q_{2k}-\frac{1}{3}\Big),\ \ q_{2k}-\frac{1}{3}=\Big(q_0-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^k=-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

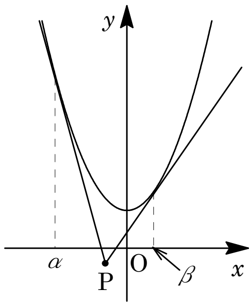
①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}$ となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　放物線 C の方程式は，$y = x^2 + 1$ ………①

また，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通る直線の傾きを m としたとき，その方程式は，

$$y - t = m(x - s),\ y = mx - ms + t\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$x^2 + 1 = mx - ms + t$

$$x^2 - mx + ms - t + 1 = 0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②が接するとき，③から，$D = m^2 - 4(ms - t + 1) = 0$

$$m^2 - 4sm + 4t - 4 = 0,\ m = 2s \pm 2\sqrt{s^2 - t + 1}$$

よって，接線 l_1，l_2 の方程式は，$y = 2\left(s \pm \sqrt{s^2 - t + 1}\right)(x - s) + t$

(2)　C と l_1，l_2 の接点は，③より，$x = \dfrac{m}{2} = s \pm \sqrt{s^2 - t + 1}$

ここで，$\alpha = s - \sqrt{s^2 - t + 1}$，$\beta = s + \sqrt{s^2 - t + 1}$ とおくと，C と l_1，l_2 で囲まれる領域の面積 S は，

$$S = \int_\alpha^s (x - \alpha)^2 dx + \int_s^\beta (x - \beta)^2 dx = \frac{1}{3}\Big[(x - \alpha)^3\Big]_\alpha^s + \frac{1}{3}\Big[(x - \beta)^3\Big]_s^\beta$$

$$= \frac{1}{3}(s - \alpha)^3 - \frac{1}{3}(s - \beta)^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{s^2 - t + 1}\right)^3$$

条件より，$\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{s^2 - t + 1}\right)^3 = a$ から，$\sqrt{s^2 - t + 1} = \left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{1}{3}}$ となり，

$$s^2 - t + 1 = \left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}},\ t = s^2 + 1 - \left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，$t < 0$ に注意すると

(i)　$1 - \left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} \geqq 0\ \left(0 < a \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ のとき

つねに $t \geqq 0$ となるので，$(s,\ t)$ は存在しない。

(ii)　$1 - \left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} < 0\ \left(a > \dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$(s,\ t)$ は④を満たす任意の値をとる。ただし，$t < 0$ から，

$$-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

［解　説］

文字は多いですが，問われている内容は，センター試験にも出題されたことがある有名なものです。