1

解答解説のページへ

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

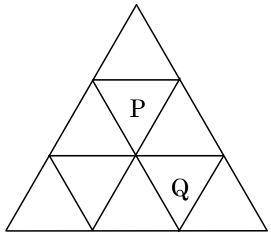
$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1,\quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

解答解説のページへ

2

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



$\boxed{3}$　　解答解説のページへ

座標平面上で 2 つの不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x^2,\ \ \frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし, y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

5

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件(D)を満たすとする。

(D)　A の成分 $a,\ b,\ c,\ d$ は整数である。また，平面上の 4 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(a+c,\ b+d)$，$(c,\ d)$ は，面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　行列 BA と $B^{-1}A$ も条件(D)を満たすことを示せ。

(2)　$c=0$ ならば，A に $B,\ B^{-1}$ のどちらかを左から次々にかけることにより，4 個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3)　$|a| \geqq |c| > 0$ とする。BA と $B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると，$|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たすことを示せ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して，$\mathrm{Tr}(P)=p+s$ と定める。

$a,\ b,\ c$ は $a\geqq b>0,\ 0\leqq c\leqq 1$ を満たす実数とする。行列 $A,\ B,\ C,\ D$ を次で定める。

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また，実数 x に対し，$U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　各実数 t に対して，x の関数

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left(\big(U(t)AU(-t)-B\big)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)\right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。（ただし，最大値をとる x を求める必要はない）

(2)　すべての実数 t に対し

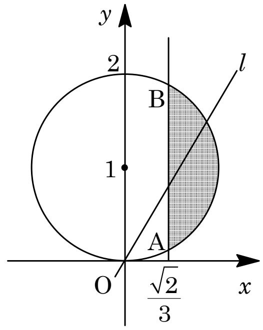
$$2\mathrm{Tr}\big(U(t)CU(-t)D\big)\geqq \mathrm{Tr}\big(U(t)AU(-t)+B\big)-m(t)$$

が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

領域 $D: x^2+(y-1)^2 \leqq 1$，$x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ において，その境界線



$x^2+(y-1)^2=1$ ……①と $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ……②の交点は,

$$\frac{2}{9}+(y-1)^2=1,\ y=1\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

そこで，$\mathrm{A}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 1-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\Big)$，$\mathrm{B}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 1+\dfrac{\sqrt{7}}{3}\Big)$とおく。

さて，直線 OA, OB の傾きを，それぞれα，βとすると,

$$\alpha=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}},\ \beta=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

ここで，直線 l の方程式を $y=mx$ ……③とすると，$\alpha<m<\beta$ において，①③より，

$$x^2+(mx-1)^2=1,\ (1+m^2)x^2-2mx=0$$

これより，原点と異なる交点の x 座標は，$x=\dfrac{2m}{1+m^2}$ となり，l と D の共通部分のの線分の長さ L は,

$$L=\sqrt{1+m^2}\Big(\frac{2m}{1+m^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\Big)$$

$$\begin{aligned}
L'&=\frac{2m}{2\sqrt{1+m^2}}\Big(\frac{2m}{1+m^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\Big)+\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{2(1+m^2)-4m^2}{(1+m^2)^2}\\
&=\frac{6m^2-\sqrt{2}m-\sqrt{2}m^3}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}+\frac{2-2m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\\
&=\frac{-\sqrt{2}\,(m^3+m-3\sqrt{2}\,)}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}\\
&=\frac{-\sqrt{2}\,(m-\sqrt{2}\,)(m^2+\sqrt{2}m+3)}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}
\end{aligned}$$

m	α	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	β
L'		$+$	0	$-$	
L		$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$	

よって, L の最大値は$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ である。また，このとき x 軸と l のなす角を θ とすると,

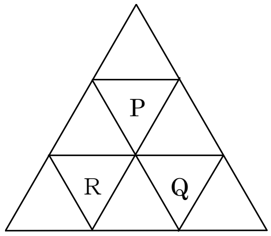
$$m=\tan\theta=\sqrt{2},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

［解 説］

導関数を求める計算が少し難ですが，それ以外は基本的な計算問題です。

2

問題のページへ



まず，部屋Rを右図のように決め，球が n 秒後にP, Q, Rにある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

さて，球はPより出発し，1秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後にはP, Q, R以外の部屋，偶数秒後にはP, Q, Rのいずれかの部屋にある。

これより，k を1以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\quad p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋P, Q, Rのいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋Qに移動する確率は，

(i)　部屋Pにあるとき　P→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋Qにあるとき　Q→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1=\frac{2}{3}$

(iii)　部屋Rにあるとき　R→Qと移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, Rの対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\quad q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_{2k}-\frac{1}{3}\right),\quad q_{2k}-\frac{1}{3}=\left(q_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ となる。

［解　説］

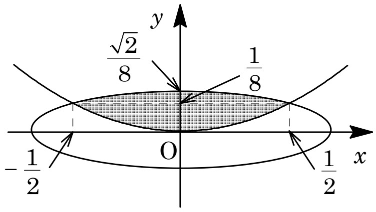
確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

3

問題のページへ

(1)　領域 $S: y \geqq \frac{1}{2}x^2$, $\frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$ において，境界線

$y=\frac{1}{2}x^2 \cdots\cdots①$, $\frac{x^2}{4}+4y^2=\frac{1}{8} \cdots\cdots②$の交点は,



$$\frac{y}{2}+4y^2=\frac{1}{8},\ 32y^2+4y-1=0$$

$$(8y-1)(4y+1)=0$$

$y \geqq 0$ から $y=\frac{1}{8}$ となり，①から $x=\pm\frac{1}{2}$

さて，②を変形しておくと，$y^2=-\frac{x^2}{16}+\frac{1}{32}$，または $x^2=\frac{1}{2}-16y^2$ である。

そこで, S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_1 は,

$$V_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(-\frac{x^2}{16}+\frac{1}{32}\Big)dx-2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}x^4\,dx=2\pi\Big[-\frac{x^3}{48}+\frac{x}{32}\Big]_0^{\frac{1}{2}}-2\pi\Big[\frac{x^5}{20}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\Big(-\frac{1}{192}+\frac{1}{32}-\frac{1}{320}\Big)\pi=\frac{11}{480}\pi$$

また, S を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_2 は,

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{8}}2y\,dy+\pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\Big(\frac{1}{2}-16y^2\Big)dy=\pi\Big[\,y^2\,\Big]_0^{\frac{1}{8}}+\pi\Big[\frac{1}{2}y-\frac{16}{3}y^3\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$$=\Big\{\frac{1}{64}+\frac{1}{16}(\sqrt{2}-1)-\frac{1}{96}(2\sqrt{2}-1)\Big\}\pi=\Big(\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{7}{192}\Big)\pi$$

(2)　$$\frac{V_2-V_1}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{7}{192}-\frac{11}{480}=\frac{\sqrt{2}}{2^3\times3}-\frac{7}{2^6\times3}-\frac{11}{2^5\times3\times5}=\frac{\sqrt{2}}{2^3\times3}-\frac{19}{2^6\times5}$$

$$=\frac{1}{2^6\times3\times5}(40\sqrt{2}-57)=\frac{1}{2^6\times3\times5}(\sqrt{3200}-\sqrt{3249})<0$$

よって，$V_2-V_1<0$ となるので，$\frac{V_2}{V_1}<1$ である。

［解　説］

第１問と同じく計算問題ですが，本問の方が数値計算の難易度は高めです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$k,\ l,\ n$ を，$k \geqq 1,\ l \geqq 1,\ n \geqq 2$ を満たす整数として，$k(k+1)=l^n$ ……①と仮定すると，$k,\ k+1$ のいずれも l^n の約数となる。

さて，$(k+1)-k=1$ より，$k,\ k+1$ は互いに素なので，$a,\ b$ を正の整数として，

$$k=a^n,\ \ k+1=b^n$$

k を消去すると，

$$b^n-a^n=1,\ (b-a)(b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=1$$

すると，$b-a>0$ から，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1}=1$ ………②

ところが，$b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1} \geqq n \geqq 2$ となり，②は成立しない。すなわち，①を満たす $k,\ l,\ n$ は存在しない。

よって，連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2)　$k,\ l,\ n$ を，$k \geqq 1,\ l \geqq 1,\ n \geqq 3$ を満たす整数として，次式を仮定すると，

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)=l^n \text{ ………③}$$

ここで，$k<k+1<k+2<\cdots<k+n-1$ から，

$$k^n<l^n<(k+n-1)^n,\ \ k<l<k+n-1$$

これより，l は $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n-2$ のいずれかと等しくなる。

そこで，p を $1 \leqq p \leqq n-2$ を満たす整数として，$l=k+p$ とおくと，③は，

$$k(k+1)\cdots(k+p)\cdots(k+n-1)=(k+p)^n$$

$$k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p+1)\cdots(k+n-1)=(k+p)^{n-1} \text{ ………④}$$

ところが，$k+p+1$ は $k+p$ と互いに素であり，$(k+p)^{n-1}$ の約数とはならないので，④は成立しない。すなわち，③を満たす $k,\ l,\ n$ は存在しない。

よって，$n \geqq 3$ のとき，連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(1)より，$n=2$ のときも合わせて，連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

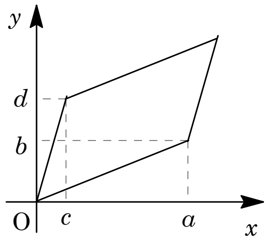
［解　説］

(2)は，(1)との関連から数学的帰納法による証明と思い込みましたが，うまくいきません。そのため，軌道修正にたいへんな時間を費やしてしまいました。

5

問題のページへ

(1) 成分が整数の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，条件(D)は，右図の平行四辺形の面積が 1 ということなので，



$$|ad-bc|=1,\ ad-bc=\pm 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}\cdots\cdots ②$$に対し，

$$(a+c)d-(b+d)c=ad-bc=\pm 1$$

また，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}\cdots\cdots ③$に対し，

$$(a-c)d-(b-d)c=ad-bc=\pm 1$$

よって，行列 BA と $B^{-1}A$ は，条件(D)を満たす。

(2) $c=0$ のとき，①より $ad=\pm 1$ となり，a, d が整数から，

$$(a,\ d)=(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1)\ (-1,\ -1)$$

さて，O を零行列とし，$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$C^2=O$ から，$n\geqq 2$ で $C^n=O$

そこで，E を単位行列とすると，$B=E+C$，$B^{-1}=E-C$ となり，

$$B^n=(E+C)^n=E^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot E^{n-1}C=E+nC=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B^{-1})^n=(E-C)^n=E^n-{}_n\mathrm{C}_1\cdot E^{n-1}C=E-nC=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

すると，$B^nA=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b+nd \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b-nd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

(i) $(a,\ d)=(1,\ 1)$ のとき　$B^nA=\begin{pmatrix} 1 & b+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix} 1 & b-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $(a,\ d)=(1,\ -1)$ のとき　$B^nA=\begin{pmatrix} 1 & b-n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix} 1 & b+n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $(a,\ d)=(-1,\ 1)$ のとき　$B^nA=\begin{pmatrix} -1 & b+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix} -1 & b-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $(a,\ d)=(-1,\ -1)$ のとき　$B^nA=\begin{pmatrix} -1 & b-n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$(B^{-1})^nA=\begin{pmatrix} -1 & b+n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

したがって，$b>0$ のとき $n=b$，$b<0$ のとき $n=-b$ とすると，B^nA または $(B^{-1})^nA$ は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のいずれかになる。

また，$b=0$ のとき，$B^{-1}BA=A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ となり，①から，題意を満たしている。

(3)　$BA=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とすると，②より，$x=a+c$，$z=c$ ………④

　また，$B^{-1}A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$とすると，③より，$x=a-c$，$z=c$ ………⑤

　さて，$|a|\geqq|c|>0$から，a, cの符号で場合分けをして，

(i)　$0<c\leqq a$のとき　$|a-c|+|c|=a-c+c=a=|a|<|a|+|c|$

(ii)　$0<-c\leqq a$のとき　$|a+c|+|c|=a+c-c=a=|a|<|a|+|c|$

(iii)　$0<c\leqq -a$のとき　$|a+c|+|c|=-a-c+c=-a=|a|<|a|+|c|$

(iv)　$0<-c\leqq -a$のとき　$|a-c|+|c|=-a+c-c=-a=|a|<|a|+|c|$

　よって，④⑤より，$|x|+|z|<|a|+|c|$が成立する。

［解　説］

　行列の成分計算についての証明問題です。(2)でB^nなどを求めるのに二項定理を利用していますが，普通に推測→帰納法としても構いません。また，(3)の 4 つの場合は，いずれも数直線を用いて考えています。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1) まず, $U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a-b)\cos^2 t & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & -(a-b)\cos^2 t\end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, $(*)$を参考にして，$a=1$，$b=-1$，$t=x$ とおくと,

$$U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)=\begin{pmatrix}\cos^2 x-\sin^2 x & 2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}$$

よって，$V(t)=\left(U(t)AU(-t)-B\right)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)$ は,

$$V(t)=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}$$

したがって，$f(x)=\mathrm{Tr}\left(\left(U(t)AU(-t)-B\right)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)\right)$ は,

$$f(x)=(a-b)\cos t\{\cos t\cos 2x+\sin t\sin 2x+\sin t\sin 2x+\cos t\cos 2x\}$$

$$=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$$

(i)　$\cos t\geqq 0$ のとき　$\cos(2x-t)=1$ で最大値 $m(t)=2(a-b)\cos t$ をとる。

(ii)　$\cos t<0$ のとき　$\cos(2x-t)=-1$ で最大値 $m(t)=-2(a-b)\cos t$ をとる。

以上より，$f(x)$ の最大値は，$m(t)=2(a-b)|\cos t|$

(2) まず, $(*)$を参考にして,

$$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix}a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t\\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^{1-c} & 0\\ 0 & a^{1-c}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)=b^{1-c}(a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t)+a^{1-c}(a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t)$$

$$=(a+b)\sin^2 t+(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t$$

$$\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)=a\cos^2 t+b(\sin^2 t+1)+a(\sin^2 t+1)+b\cos^2 t$$

$$=2a+2b$$

すると，$P=2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)-\mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)+m(t)$

$$=2(a+b)\sin^2 t+2(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t-2a-2b+2(a-b)|\cos t|$$

ここで，$|\cos t|=z$ とすると，$0\leqq z\leqq 1$ となり,

$$P=2(a+b)(1-z^2)+2(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)z^2-2a-2b+2(a-b)z$$

$$=2z\{(-a-b+a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)z+(a-b)\}\cdots\cdots①$$

さらに，$f(z)=(-a-b+a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)z+(a-b)$ とおくと，

$$f(z)=\{a^{1-c}(b^c-a^c)+b^{1-c}(a^c-b^c)\}z+(a-b)$$
$$=-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})z+(a-b)$$

すると，$a\geqq b>0$，$0\leqq c\leqq 1$ から，$-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})\leqq 0$ となるので，

$$f(z)\geqq f(1)=-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})+(a-b)=a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c-2b\cdots\cdots②$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$f(1)\geqq 2\sqrt{a^cb^{1-c}a^{1-c}b^c}-2b=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\geqq 0\cdots\cdots③$$

①②③より，$P=2zf(z)\geqq 2zf(1)\geqq 0$ となり，

$$2\mathrm{Tr}(U(t)CU(-t)D)\geqq \mathrm{Tr}(U(t)AU(-t)+B)-m(t)$$

［解 説］

2 問続けて行列が題材となっています。ただ，本問は量的にかなりのものがあります。難問というわけではありませんが。