1

解答解説のページへ

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C, 原点 O を通る傾き t の直線を l とし, C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし, それら共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$　$(0 \leqq a \leqq 1)$ を考える。

(1)　2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数の定数とする。実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

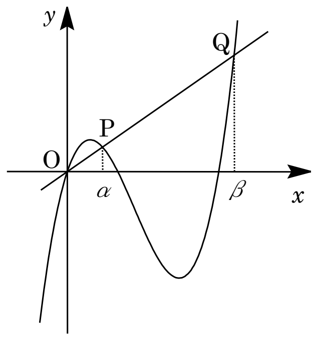
(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

1

問題のページへ



$C: y=x(x-1)(x-3)$ ……①，$l: y=tx$ ……②に対して，共有点の x 座標は，

$$x(x-1)(x-3)=tx,\ x(x^2-4x+3-t)=0$$

$x\neq 0$ とすると，$x^2-4x+3-t=0$ ………③

さて，C と l が O 以外の共有点をもつ条件は，③が $x\neq 0$ の解をもつことである。さらに，③が重解として $x=0$ をもつ場合はないことに注意すると，条件は，

$$D/4=4-(3-t)=1+t\geqq 0,\ t\geqq -1 \text{ ………④}$$

ここで，④のとき，③の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積 $g(t)$ は，

$$g(t)=\sqrt{1+t^2}|\alpha|\cdot\sqrt{1+t^2}|\beta|=(1+t^2)|\alpha\beta|=(1+t^2)|3-t|$$

(i)　$t\geqq 3$ のとき

$$g(t)=-(1+t^2)(3-t)=t^3-3t^2+t-3,\ g'(t)=3t^2-6t+1$$

$g'(t)=0$ の解は，$t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ となり，ともに $t<3$ である。

(ii)　$-1\leqq t<3$ のとき

$$g(t)=(1+t^2)(3-t)=-(t^3-3t^2+t-3),\ g'(t)=-(3t^2-6t+1)$$

(i)(ii)より，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘	0	↗

さて，$-1\leqq t<3$ のとき，$g(t)$ を $g'(t)$ で割ると，

$$g(t)=g'(t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\right)$$

すると，$g\left(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$　（複号同順）

よって，$g(t)$ の極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，および $0\ (t=3)$ である。

［解　説］

微分と増減についての標準的な問題です。

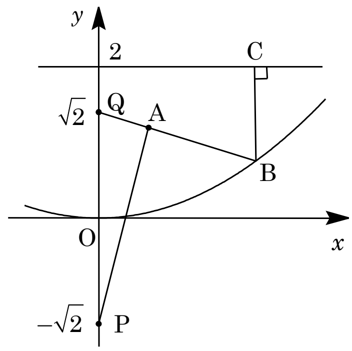
2

問題のページへ

(1)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき, 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$, $\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$, $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}&=\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}}\\&=\sqrt{2a^2+2}+1-(\sqrt{2a^2+2}-1)=2\end{aligned}$$

(2)　(1)より, $\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}+2$ となり,



$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=\mathrm{AQ}+2+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\&=\mathrm{BQ}+\mathrm{BC}+2\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とおくと,

$$\mathrm{BC}=2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BQ}^2&=t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2\\&=t^2+2\left(\frac{t^4}{64}-\frac{t^2}{4}+1\right)=2\left(\frac{t^4}{64}+\frac{t^2}{4}+1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{BQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots③$

①②③より, $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)+2=4+\sqrt{2}$

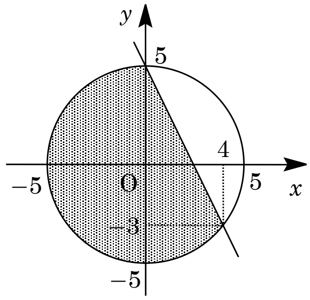
［解 説］

数 C の範囲になりますが, 双曲線と放物線の定義を題材にしたものです。この点を利用すると, 計算はほとんど不要になります。

3

問題のページへ

まず，連立不等式 $x^2+y^2\leqq 25$，$2x+y\leqq 5$ の満たす領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



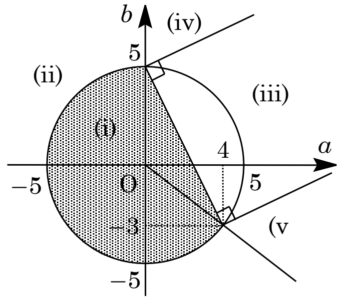
また，実数 a，b に対して，

$$z=x^2+y^2-2ax-2by$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$$

これより，z が最小値をとるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ の距離が最小になるときである。

ここで，境界線 $2x+y=5$，すなわち $y=-2x+5$ に垂直で，点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$y=\frac{1}{2}x+5,\quad y=\frac{1}{2}x-5$$



さらに，原点 O と点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$x=0,\quad y=-\frac{3}{4}x$$

(i)　$a^2+b^2\leqq 25$ かつ $b\leqq -2a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(a,\ b)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=-(a^2+b^2)=-a^2-b^2$$

(ii)　$a^2+b^2\geqq 25$ かつ $\left(a\leqq 0\ \text{または}\ b\leqq -\dfrac{3}{4}a\right)$ のとき

z は，O と点 $(a,\ b)$ を結ぶ線分と円 $x^2+y^2=25$ の交点において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$$

(iii)　$b\geqq -2a+5$ かつ $b\leqq\dfrac{1}{2}a+5$ かつ $b\geqq\dfrac{1}{2}a-5$ のとき

z は，点 $(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(2a+b-5)^2-(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$$

(iv)　$a\geqq 0$ かつ $b\geqq\dfrac{1}{2}a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(0,\ 5)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=25-10b$$

(v)　$b\geqq -\dfrac{3}{4}a$ かつ $b\leqq\dfrac{1}{2}a-5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(4,\ -3)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=16+9-8a+6b=25-8a+6b$$

［解 説］

点 $(a,\ b)$ が領域の外部にあるときは，境界線に沿って，円を滑らないように転がせながら，考えをまとめています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

A が n 回目にコインを投げ，それが 2 回目の表である場合を考える。

(i)　B が得点を獲得せず，A が勝利するとき

まず，A が 1 点目を獲得するのは 1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-1$回目のいずれかであり，2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は偶数となり，1 点目の獲得回の選び方が $\dfrac{n}{2}$ 通りより，この確率は，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(ii)　A, B の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

A, B の順に 1 点ずつを獲得するのは，1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-2$ 回目から 2 回を選び，前を A が 1 点目を獲得する回，後を B が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は奇数となり，1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

(iii)　B, A の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

B, A の順に 1 点ずつを獲得するのは，2 回目，4 回目，6 回目，…，$n-1$回目から 2 回を選び，前を B が 1 点目を獲得する回，後を A が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は奇数となり，1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

以上より，A の勝利となる確率 $p(n)$ は，n を偶奇に分けて，

$$p(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad (n\text{ が偶数})$$

$$p(n) = 2\times(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\quad (n\text{ が奇数})$$

［解　説］

具体的に考えていきましたが，問題の設定状況を把握するのにたいへん時間がかかってしまい，難度がかなり高く感じられました。