1

解答解説のページへ

実数 $a,\ b$ に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$

$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。このとき, 次の条件(i), (ii)がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(i)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ii)　P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 は相異なる。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1) $\angle\mathrm{APB}$，$\angle\mathrm{APC}$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

1

問題のページへ

$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)$ より，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ………①

ここで，$a=b=0$ のとき，$n\geqq 1$ で $\mathrm{P}_n(0,\ 0)$ となり，条件に反する。

そこで，$r=a^2+b^2>0$ として，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ とおくと，①より，

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

すると，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ ………②

さて，条件(i)より，$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので，②より，$r^6=1\ (r=1)$ となり，

$$\cos 6\theta=1\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \sin 6\theta=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

θ の範囲を $-\pi<\theta\leqq\pi$ とすると，③④より，$6\theta=0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ 6\pi$ となり，

$$\theta=0,\ \pm\frac{1}{3}\pi,\ \pm\frac{2}{3}\pi,\ \pi$$

(a)　$\theta=0$ のとき　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_1$ となり，条件(ii)に反する。

(b)　$\theta=\pm\dfrac{1}{3}\pi$ のとき　条件(ii)を満たし，

$$(a,\ b)=\Big(\cos\Big(\pm\frac{\pi}{3}\Big),\ \sin\Big(\pm\frac{\pi}{3}\Big)\Big)=\Big(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

(c)　$\theta=\pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_3$ となり，条件(ii)に反する。

(d)　$\theta=\pi$ のとき　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_2$ となり，条件(ii)に反する。

(a)～(d)より，$(a,\ b)=\Big(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)$

［解 説］

相似変換を題材にした問題ですが，これに気付かなければ，時間がいくらあっても足りません。

2

問題のページへ

$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，$g(x)=\sin x+ax$ を連立すると，$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ より，

$$\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a\,,\ \ \frac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a$$

さて，$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと，$x>0$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をちょうど 3 つもつ条件は，$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をちょうど 3 つもつ条件に等しい。

$$h'(x)=\frac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{x^2+2}{x^3}\cos x$$

ここで，n を 0 以上の整数とすると，$h'(x)=0$ の解は，$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$h\Big(n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)=-\frac{(-1)^n}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

すると，$h(x)$ の増減は下表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	∞	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	$\searrow$

これから，$h(x)$ は n が偶数のとき負の極小値をもち，その値は n の値の増加に伴って増加する。また，n が奇数のとき正の極大値をもち，その値は n の値の増加に伴って減少する。

以上より，共有点をちょうど 3 つもつ条件は，

$$a=-\frac{2}{5\pi},\ \ \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}$$

［解　説］

定数分離によって，共有点の個数を調べるという頻出のタイプです。なお，解答例では $y=h(x)$ のグラフは記していませんが，下書きでは，しっかりと書いています。

3

問題のページへ

(1)　A が n 回目にコインを投げ，それが 2 回目の表である場合を考える。

(i)　B が得点を獲得せず，A が勝利するとき

まず，A が 1 点目を獲得するのは 1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-1$回目のいずれかであり，2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は偶数となり 1 点目の獲得回の選び方が $\dfrac{n}{2}$ 通りより，この確率は，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(ii)　A, B の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

A, B の順に 1 点ずつを獲得するのは，1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-2$ 回目から 2 回を選び，前を A が 1 点目を獲得する回，後を B が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

(iii)　B, A の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

B, A の順に 1 点ずつを獲得するのは，2 回目，4 回目，6 回目，…，$n-1$ 回目から 2 回を選び，前を B が 1 点目を獲得する回，後を A が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

以上より，A の勝利となる確率 $p(n)$ は，n を偶奇に分けて，

$$p(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad (n\text{ が偶数})$$

$$p(n) = 2\times(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\quad (n\text{ が奇数})$$

(2)　k を自然数とすると，(1)より，$p(2k) = 2k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$p(2k-1) = (2k-2)(2k-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} = 2(k-1)(k-2)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

さて，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(k)$ とおくと，

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\{p(2k) + p(2k-1)\} = \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - 5k + 4)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

ここで, a, b, c を定数として, 次式が成り立つようにこれらの値を求める。

$$(2k^2-5k+4)\left(\frac{1}{4}\right)^k=\{a(k+1)^2+b(k+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}-(ak^2+bk+c)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

係数を比較すると,

$$a-4a=8,\ 2a+b-4b=-20,\ a+b+c-4c=16$$

これより，$a=-\dfrac{8}{3}$，$b=\dfrac{44}{9}$，$c=-\dfrac{124}{27}$ となり，

$$S_{2n}=\{a(n+1)^2+b(n+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(a+b+c)\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$\to -\frac{1}{4}(a+b+c)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}+\frac{44}{9}-\frac{124}{27}\right)=\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$$

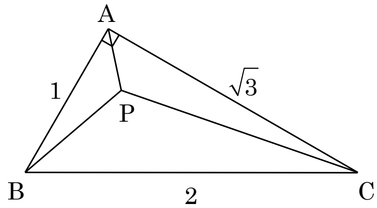
$$S_{2n+1}=S_{2n}+p(2n+1)=S_{2n}+2n(2n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\to\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$$

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$ である。

［解　説］

(1)は文系と共通です。問題の設定状況を把握するのにたいへん時間がかかってしまい, 難度がかなり高く感じられました。また, 理系で追加された(2)ですが, いろいろな解法があるものの, どれをとっても計算量が半端ではありません。解答例では, 階差数列を設定するという方法ですが, かなり時間がかかりました。なお, $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ などを, いきなり利用していますが, 余裕があれば二項定理でも用いて証明した方がよいでしょう。

4　問題のページへ



(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおくと，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}$

両辺の大きさをとって，$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}\right|$

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=1,\ \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\right|^2+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|^2=1,\ 1+\frac{2ab\cos\angle\mathrm{APB}}{ab}+1=1$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APB}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{APB}=120^\circ$

また，①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}$ とすると，同様にして，$\angle\mathrm{APC}=120^\circ$

(2)　(1)より，$\angle\mathrm{BPC}=120^\circ$ となり，$\triangle\mathrm{APB}$, $\triangle\mathrm{BPC}$, $\triangle\mathrm{CPA}$ に余弦定理を適用して，

$$a^2+b^2+ab=1\cdots\cdots②,\ b^2+c^2+bc=4\cdots\cdots③,\ c^2+a^2+ca=3\cdots\cdots④$$

②より，$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a-b$，$a^3-b^3=a-b\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，同様にすると，

$$b^3-c^3=4(b-c)\cdots\cdots\cdots⑥,\ c^3-a^3=3(c-a)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑥＋⑦より，$-2a+3b-c=0$，$c=-2a+3b\cdots\cdots\cdots⑧$

③－④より，$b^2-a^2+c(b-a)=1\cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より，$b^2-a^2+(-2a+3b)(b-a)=1$，$a^2+4b^2-5ab=1\cdots\cdots\cdots⑩$

②⑩より，$3b^2-6ab=0$，$b=2a\cdots\cdots\cdots⑪$

②に代入すると，$7a^2=1$ から，$a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となり，⑪⑧より，

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ である。

［解　説］

(2)は，余弦定理から得られた連立方程式を解くという方針を立てました。ただ，あまりにも解きにくく，頂点 A を原点とする座標系を設定しようかと心が揺らぎましたが，敢えて初心を貫きました。

$\boxed{5}$　問題のページへ

(1)　x が正の実数，y が自然数のとき，$P=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-(x^3+3yx^2)$ とおくと，

$$P=(x+y)^3-(x+y)-(x^3+3yx^2)=3xy^2+y^3-x-y$$
$$=(3y^2-1)x+y^3-y$$

$x>0$，$3y^2-1>0$，$y^3-y\geqq 0$ より，$P>0$ はつねに成立する。

次に，$Q=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-\{x^3+(3y+1)x^2\}$ とおくと，

$$Q=(x+y)^3-(x+y)-x^3-(3y+1)x^2=3xy^2+y^3-x-y-x^2$$
$$=-x^2+(3y^2-1)x+y^3-y$$

$Q<0$ であることより，$x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0$

$x>0$，$-(y^3-y)\leqq 0$ より，$x>\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$ ………①

よって，$P>0$ かつ $Q<0$ を満たす正の実数 x の範囲は①である。

(2)　(1)より，①のもとで，

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，1 が連続して 99 回現れる 99 桁の整数 $m=1+10+10^2+\cdots+10^{98}$ は，9 の倍数であるので，y を自然数として $m=3y$ とおくことができる。

そこで，n を十分に大きな整数として，$x=10^n$ とおくと，①を満たし，

$$x^3+3yx^2=10^{3n}+m\cdot 10^{2n}=(10^n+m)\cdot 10^{2n}$$
$$x^3+(3y+1)x^2=10^{3n}+(m+1)\cdot 10^{2n}=(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$$

このとき，$(10^n+m)\cdot 10^{2n}$ は 1 が連続して 99 回現れ，また $(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$ は 1 が連続して 98 回現れた次に 2 が 1 回現れる。

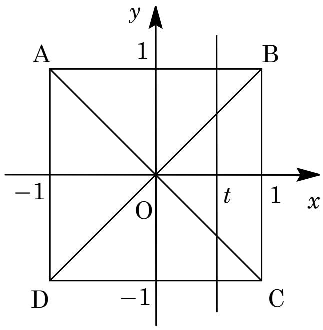
すると，②より，与えられた条件(a)，(b)をともに満たす連続する 3 つの自然数の積 $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ で表される自然数が存在する。

［解 説］

2008 年に雰囲気の似た問題がありますが，考えにくさについては，各段の相違があります。とらえどころのない難問です。なお，(2)では，与えられた不等式をみて，x の値として，10, 100, 1000, …と考えていきました。

$\boxed{6}$

問題のページへ



(1)　正方形 S を直線 BD を軸として回転させてできる立体 V_1 は，中心 O で半径 $\sqrt{2}$ の円を底面とし，高さ $\sqrt{2}$ の直円錐を底面で 2 つ結合したものである。ここで，点 B を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\geqq 0)\cdots\cdots①$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ なので，①より，

$$-(x-1)-(y-1)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-x-y+2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

$-x-y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$2xy-4x-4y+4=-2x-2y+z^2+2$$

$$z^2-2xy+2x+2y-2=0\quad(0\leqq x+y\leqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

次に，点 D を頂点とする直円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

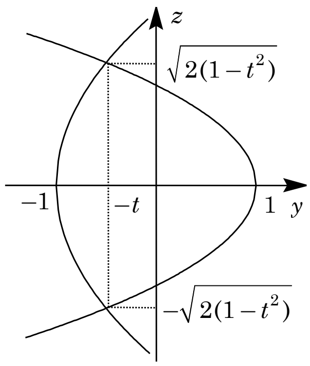
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(x+1,\ y+1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(1,\ 1,\ 0)$ なので，③より，同様にして，

$$x+y+2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+z^2}$$

$x+y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$z^2-2xy-2x-2y-2=0\quad(-2\leqq x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，平面 $x=t\ (0\leqq t<1)$ による V_1 の切り口を考える。



②より，$z^2-2ty+2t+2y-2=0\ (0\leqq t+y\leqq 2)$ から，

$$z^2=-(2-2t)(y-1)$$

$$y-1=-\frac{z^2}{2-2t}\quad(-t\leqq y\leqq 2-t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$z^2-2ty-2t-2y-2=0\ (-2\leqq t+y\leqq 0)$ から，

$$z^2=(2+2t)(y+1)$$

$$y+1=\frac{z^2}{2+2t}\quad(-2-t\leqq y\leqq -t)\cdots\cdots\cdots⑥$$

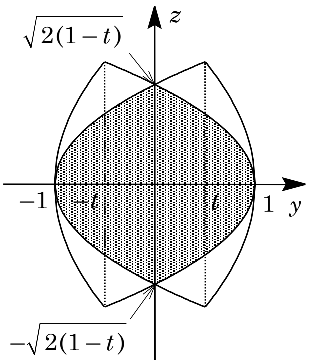
平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積 $S_1(t)$ は，対称性を考えて，

$$S_1(t)=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2-2t}\right)-\left(-1+\frac{z^2}{2+2t}\right)\right\}dz$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\left[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t^2)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t^2)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$$

(2)　立体をV_1と直線 AC を軸として回転させてできる立体V_2は xz 平面に関して対称となるので，V_1とV_2の共通部分を，平面$x=t$ $(0 \leqq t < 1)$で切断した切り口は右図の網点部のようになる。



この面積を$S(t)$とすると，

$$S(t) = 4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}} \left\{1 - \frac{z^2}{2(1-t)}\right\} dz$$

$$= 4\left[z - \frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

V_1とV_2はyz平面について対称なので，この共通部分の体積Vは，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{9}\sqrt{2}$$

［解　説］

東大で頻出している立体の体積を求める問題です。ただ，今年のものは計算量がかなり多めとなっています。なお，円錐面の方程式については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。