**1**　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$t$ を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を $t$ を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。$t$ が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

$a$ を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 $a$ 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 $a$ 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 $a$ 個のみとなる。

$n$ 回目に取り出した球が赤球である確率を $p_n$ とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　$p_1$，$p_2$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して $p_n$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を $D$ とする。

(1)　$s$ を $-3\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が $D$ に入るような $t$ の範囲を求めよ。

(2)　$D$ を図示せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$r$ を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = r\,,\ a_2 = r+1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 $p$ を 1 つとり，$a_n$ を $p$ で割った余りを $b_n$ とする。ただし，0 を $p$ で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 $n$ に対し，$b_{n+2}$ は $b_{n+1}(b_n+1)$ を $p$ で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 $n$ に対して，$b_n$ を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n$, $m$ に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0\,,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

**1**

問題のページへ

(1)　$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$ に対して,

$$f(x)=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t$$

よって，$f(x)$は，$t=2t-3$ のとき最大値$t^3-9t^2+15t$ をとる。

(2)　(1)より，$g(t)=t^3-9t^2+15t$ となり，

$$g'(t)=3t^2-18t+15$$
$$=3(t-1)(t-5)$$

すると，$t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(t)$ の増減は右表のようになる。ここで，$g(5)=-25$ であり，

| $t$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{\sqrt{2}}+15\right)=-\frac{31\sqrt{2}+18}{4}$$

そこで，$-\dfrac{31\sqrt{2}+18}{4}-(-25)=\dfrac{82-31\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6724}-\sqrt{1922}}{4}>0$ なので，$g(t)$ の最小値は$g(5)=-25$ となる。

［解　説］

関数値の増減についての計算問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　はじめ袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているので，1 回目に取り出した球が赤球である確率 $p_1$ は，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ である。

次に，2 回目に取り出した球が赤球であるのは，1 回目に取り出した球が白球のときだけなので，その確率 $p_2$ は，$p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ である。

(2)　$n$ を自然数として，$n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは，$n$ 回目に取り出した球が白球のときだけなので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}(1-p_n),\quad p_{n+1}=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=-\frac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=-\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$ である。

［解 説］

確率と漸化式についての頻出題です。与えられた条件が扱いやすいので，すんなりと立式できます。

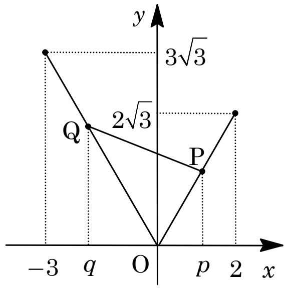
$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$-3\leqq q\leqq 0$ より $-3\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $0\leqq p\leqq 2$ である。




ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

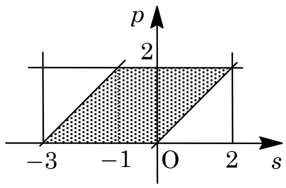
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots③$

ただし，$-3\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$0\leqq p\leqq 2$ であり，これを $sp$ 平面上に図示すると，右図の網点部となる。




そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i)　$-3\leqq s\leqq -1$ のとき

右上図より $0\leqq p\leqq s+3$ となり，$\dfrac{s+3}{2}=\dfrac{0+(s+3)}{2}$ なので，

$$f(0)=f(s+3)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ -\sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii)　$-1\leqq s\leqq 0$ のとき　右上図より，$0\leqq p\leqq 2$ となり，$1\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$ から，

$$f(0)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ -\sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(iii)　$0\leqq s\leqq 2$ のとき　右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ である。

(iii-i)　$\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$　$(0\leqq s\leqq 1)$ のとき

$$f(s)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(iii-ii)　$\dfrac{s+3}{2}\geqq 2$　$(1\leqq s\leqq 2)$ のとき

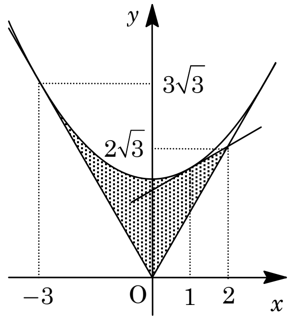
$$f(s)\leqq f(p)\leqq f(2),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

以上より，$D$ に入るような $t$ の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \quad (-3 \leqq s \leqq 0)$$

$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \quad (1 \leqq s \leqq 2)$$




(2) 領域 $D$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解 説］

線分の通過領域の問題ですが，まとめていくのに，かなりの時間を費やします。上の解答例では，条件の不等式を $sp$ 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p=\dfrac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。

**4**

問題のページへ

(1)　$b_n$ は $a_n$ を素数 $p$ で割った余りなので，商を $q_n$ とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，$a_{n+2}$ を $p$ で割った余り $b_{n+2}$ は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を $p$ で割った余りと一致する。

(2)　$r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，$b_3$ は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

$b_4$ は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

$b_5$ は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3)　まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を $p$ で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を $p$ で割った余りに等しい。すなわち，$k$ を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，$b_{n+1}$ は $p$ の倍数でないので，$b_n - b_m$ が $p$ の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)の設問が，続く(2)，(3)への誘導として利いています。