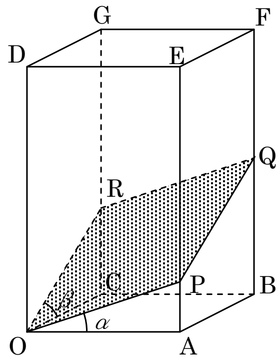
1

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。



(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(∗)を考える。

(∗)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(∗)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

3 解答解説のページへ

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 1,\quad C_2 : y = (x-u)^2 + u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ を満たすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。$2\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

$p,\ q$ は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0<x_0<1$ を満たす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$x_n=f(x_{n-1})$ によって順次定める。$p>q$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となることを示せ。

(3)　$p<q$ であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

5

解答解説のページへ

r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = r\,,\ a_2 = r+1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0\,,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

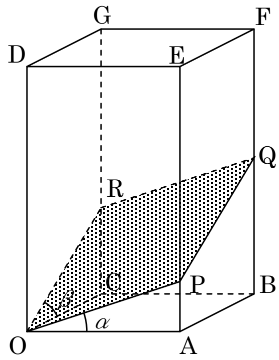
座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

1

問題のページへ



(1)　O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$となる。

条件より，$\mathrm{AP}=\tan\alpha$，$\mathrm{CR}=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から, 四角形 OPQR は平行四辺形となり, その面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2)　条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお, 図から「四角柱は直方体」として解いています。

2

問題のページへ

(1) はじめ袋Uの中に，白球が $a+2$ 個，赤球が1個入っているので，1回目に取り出した球が赤球である確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ である。

次に，2回目に取り出した球が赤球であるのは，1回目に取り出した球が白球のときだけなので，その確率 p_2 は，$p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ である。

(2) n を自然数として，$n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは，n 回目に取り出した球が白球のときだけなので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}(1-p_n),\quad p_{n+1}=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=-\frac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=-\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$ である。

(3) (2)より，

$$\sum_{n=1}^{m}p_n=-\frac{1}{(a+3)(a+2)}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1+\frac{1}{a+1}}+\frac{m}{a+2}$$

$$=-\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{m}{a+2}$$

ここで，$a\geqq 1$ より，$-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{1}{a+1}<0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{-1}{m}\cdot\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{1}{a+2}\right]=\frac{1}{a+2}$$

［解 説］

確率と漸化式についての頻出題です。与えられた条件が扱いやすいので，すんなりと立式できます。なお，(2)までは文理共通です。

3

問題のページへ

(1) $C_1 : y=-x^2+1$ ……①，$C_2 : y=(x-u)^2+u$ ……②を連立すると，

$$-x^2+1=(x-u)^2+u\,,\ 2x^2-2ux+u^2+u-1=0 \cdots\cdots ③$$

C_1とC_2が共有点をもつ条件は，③が実数解をもつ条件に対応し，

$$D/4=u^2-2(u^2+u-1)\geqq 0\,,\ u^2+2u-2\leqq 0$$

よって，$-1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$ より，$a=-1-\sqrt{3}$，$b=-1+\sqrt{3}$ である。

(2) ③の実数解を$x=x_1$，x_2とおくと，$\mathrm{P}_1(x_1,\ -{x_1}^2+1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ -{x_2}^2+1)$となり，

$$x_1+x_2=u\,,\ x_1x_2=\frac{1}{2}(u^2+u-1) \cdots\cdots ④$$

ここで，$f(u)=2|x_1y_2-x_2y_1|$とおくと，

$$f(u)=2|x_1(-{x_2}^2+1)-x_2(-{x_1}^2+1)|=2|x_1x_2(-x_2+x_1)+x_1-x_2|$$
$$=2|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)|=2|x_1x_2+1|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

④を代入すると，$f(u)=|(u^2+u-1)+2|\sqrt{u^2-2(u^2+u-1)}$

$$=|u^2+u+1|\sqrt{-u^2-2u+2}$$

さらに，$u^2+u+1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ より，$f(u)=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$

(3) 条件より，$I=\int_a^b f(u)du=\int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}}(u^2+u+1)\sqrt{-(u+1)^2+3}\,du$

ここで，$u+1=v$とおくと，

$$I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{(v-1)^2+v\}\sqrt{-v^2+3}\,dv=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(v^2-v+1)\sqrt{-v^2+3}\,dv$$

さらに，$v=\sqrt{3}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，$dv=\sqrt{3}\cos\theta\cdot d\theta$から，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)\cdot\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$
$$=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=0$ より，$I=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3\sin^4\theta+2\sin^2\theta+1)\,d\theta$

すると，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$から，

$$I=6\left(-3\cdot\frac{3}{16}\pi+2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{21}{8}\pi$$

［解 説］

実質的には，定積分の計算問題です。スペースの関係上，公式を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　$0<p<1$，$q>0$ である定数 $p,\ q$ に対して，$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$

$0<x<1$ のとき，$(1-p)x>0$，$(1-x)(1-e^{-qx})>0$ より $f(x)>0$ となり，

$$1-f(x)=1-(1-p)x-(1-x)(1-e^{-qx})=px+(1-x)e^{-qx}>0$$

よって，$0<f(x)<1$ である。

(2)　$0<x_0<1$，$x_n=f(x_{n-1})$ で定められる数列 $\{x_n\}$ に対して, (1)より $0<f(x_0)<1$ すると，$0<x_1<1$ となり，帰納的に $0<x_n<1$ である。

さて，$\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\dfrac{(1-p)x_{n-1}+(1-x_{n-1})(1-e^{-qx_{n-1}})}{x_{n-1}}=1-p+\Big(\dfrac{1}{x_{n-1}}-1\Big)(1-e^{-qx_{n-1}})$

ここで，条件より，$1-qx_{n-1}\leqq e^{-qx_{n-1}}$ より，$1-e^{-qx_{n-1}}\leqq qx_{n-1}$ となり，

$$0<\frac{x_n}{x_{n-1}}\leqq 1-p+\Big(\frac{1}{x_{n-1}}-1\Big)\cdot qx_{n-1}=1-p+q-qx_{n-1}<1-p+q$$

これより，$0<x_n<(1-p+q)x_{n-1}$ から，$n\geqq 1$ で，$0<x_n<x_0(1-p+q)^n$

すると，$1>p>q>0$ より $0<1-p+q<1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

(3)　$g(x)=f(x)-x=-px+(1-x)(1-e^{-qx})$ とおくと，$g(0)=0$，$g(1)=-p<0$

$$g'(x)=-p-(1-e^{-qx})+(1-x)\cdot qe^{-qx}$$

すると，$g'(0)=-p+q$ となり，$p<q$ のとき，$g'(0)>0$ から，十分に小さい正の数 h をとると，$g(h)>g(0)=0$ である。

したがって，$g(x)$ は連続関数なので，$0<h<c<1$ を満たすある実数 c に対して $g(c)=0$ すなわち $c=f(c)$ となる。

［解　説］

初めは, (1)は $f(x)$ を微分することによって増減を知らべ, (2)は平均値の定理の応用と考え計算を進めましたが, 沈没寸前になりました。そこで, 微分する代わりに与えられた不等式 $1+x\leqq e^x$ を用いるように方針転換をした解答例です。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2)　$r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3)　まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，$b_n - b_m$ が p の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$$1 \leqq b_2 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_3 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_4 \leqq p-1,\ \cdots\cdots$$

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k, l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 $n, m\ (n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

［解　説］

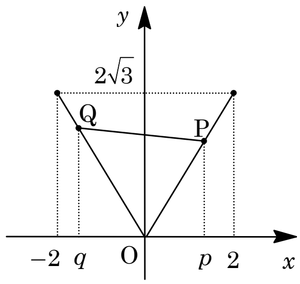
漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\text{①}$$



ただし，$-2\leqq q\leqq 0$ より $-2\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $1\leqq p\leqq 2$ である。

ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

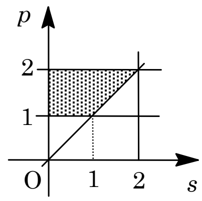
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\text{②}$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\text{③}$

ただし，$0\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$1\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i)　$0\leqq s\leqq 1$ のとき

右上図より，$1\leqq p\leqq 2$ となり，$\frac{3}{2}\leqq\frac{s+3}{2}\leqq 2$ から，

$$f(1)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii)　$1\leqq s\leqq 2$ のとき

右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$2\leqq\frac{s+3}{2}\leqq\frac{5}{2}$ から，

$$f(s)\leqq f(p)\leqq f(2),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

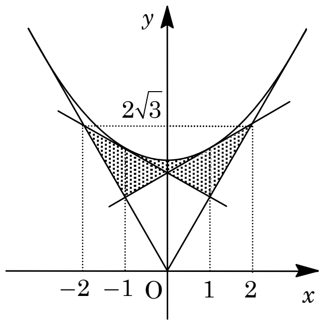
$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad(1\leqq s\leqq 2)$$

(2)　$-2\leqq s\leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(-1\leqq s\leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$と直線$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$は，それぞれ$s=1$，$s=-1$で接することに注意して点$(s,\ t)$を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる$p=\dfrac{s+3}{2}$も書き込んでおくのも，1 つの方法です。文系に類題がありますが，理系の方がすっきりした形になっています。