1

解答解説のページへ

以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ を満たすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

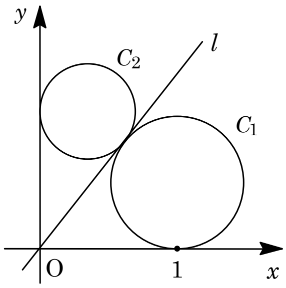
l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。



4

解答解説のページへ

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

1　問題のページへ

(a)　命題 A については，偽となり，反例は$n=17$である。

$f(n)=n^2(n-26)+2600$とすると，

$$f(17)=17^2(17-26)+2600=-1<0$$

よって，$n=17$のとき，$n^3+2600<26n^2$となり，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$は成立しない。

(b)　命題 B については，真となり，証明は以下の通りである。

整数$n,\ m,\ l$に対して$5n+5m+3l=1$より，$3l=1-5(n+m)\cdots\cdots(*)$となり，

$$10nm+3ml+3nl=10nm+\{1-5(n+m)\}(m+n)$$

$$=10mn-5(m+n)^2+(m+n)=-5m^2-5n^2+m+n$$

$$=-5\left\{\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{50}\right\}$$

ここで，$n,\ m$は整数より，$\left(m-\dfrac{1}{10}\right)^2\geqq\dfrac{1}{100}$かつ$\left(n-\dfrac{1}{10}\right)^2\geqq\dfrac{1}{100}$より，

$$-5\left\{\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{50}\right\}\leqq 0$$

等号が成立するのは，$m=n=0$の場合だけであるが，このとき$(*)$から，lが整数という条件に反する。

すなわち，$-5\left\{\left(m-\dfrac{1}{10}\right)^2+\left(n-\dfrac{1}{10}\right)^2-\dfrac{1}{50}\right\}<0$より，$10nm+3ml+3nl<0$となる。

［解　説］

命題 A については，xを正の実数として，関数$f(x)=x^2(x-26)+2600$を設定し，微分して増減を調べると，$x=\dfrac{52}{3}=17+\dfrac{1}{3}$において極小値をとることがわかります。これより，$f(17)$と$f(18)$の値を調べるということになり，$f(17)<0$が判明したわけです。また，命題 B については，証明の締めをmn平面上で示すという手も考えられます。

2

問題のページへ

2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ および点 $P(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1\ \cdots\cdots\cdots ②,\quad a+b+c=-1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\Big(x-\frac{1}{2a}\Big)^2-a-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $P(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$$(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

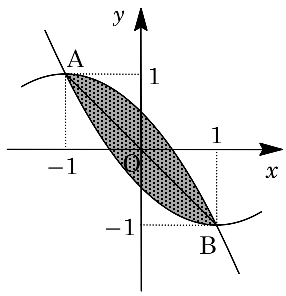
(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$

以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\Big\{\Big(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Big)-\Big(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\Big)\Big\}dx$$

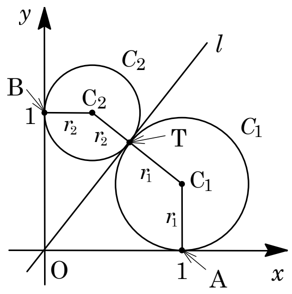
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

［解　説］

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

3

問題のページへ



円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A, B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。

すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C}_1(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C}_2(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1,\ (1+r_1)r_2=1-r_1,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，$(*)$から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$
$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\dfrac{3}{2}\left(r_1=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$(*)$から $r_2=\dfrac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C}_1\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2$ を $r_1:r_2=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$ となり，直線 l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

［解　説］

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

4

問題のページへ

(1)　まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げ，表が出たときは文字列 A_1A_2，裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回コインを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。すると，$p_1 = r_1 = \dfrac{1}{2}$，$q_1 = 0$ で，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1} = p_n \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n + r_n) = \dfrac{1}{2}(1 - p_n) = -\dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\Big(p_n - \frac{1}{3}\Big),\quad p_n - \frac{1}{3} = \Big(p_1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

よって，$p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}$ となり，②より，$n \geqq 2$ において，

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

なお，この式は，$n = 1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 $p_n + q_n$ は，

$$p_n + q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-2}\Big\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

［解　説］

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，3 つの状態に分けて考えたわけです。