1

解答解説のページへ

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C : y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

どの目も出る確率が$\dfrac{1}{6}$のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると，得られる文字列は，AACDAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。

5

解答解説のページへ

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ g(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ h(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

1

問題のページへ

a が正の実数全体を動くとき，$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ ……①の通過領域は，①を a の方程式とみたとき，少なくとも 1 つの正の解が存在する$(x,\ y)$の条件として表せ，

$$4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2,\ \ 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$x^2 - 1 = 0\ (x = \pm 1)$のとき

②は$-4ya + 1 = 0$となり，$a > 0$を解にもつ条件は，$-4y < 0$すなわち$y > 0$。

(ii)　$x^2 - 1 \neq 0\ (x \neq \pm 1)$のとき

②の左辺を，$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$とおき，$f(0) = 1 > 0$に着目する。

(ii-i)　$x^2 - 1 > 0\ (x < -1,\ 1 < x)$のとき

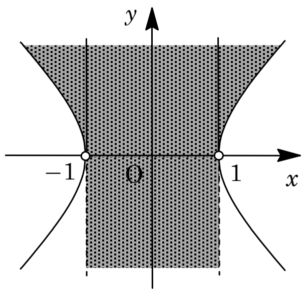
$a > 0$を解にもつ条件は，$D/4 = 4y^2 - 4(x^2-1) \geqq 0$かつ$a = \dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$より，

$$x^2 - y^2 \leqq 1,\ \ y > 0$$

(ii-ii)　$x^2 - 1 < 0\ (-1 < x < 1)$のとき

$f(0) > 0$より，②はつねに$a > 0$の解をもつ。

以上まとめると，放物線 C の通過する領域は右図の網点部である。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。



［解　説］

x を固定して y のとり得る範囲を求めるか，または方程式が実数解をもつ条件としてとらえるかという 2 つの方法があります。上の解では$f(a) = 0$の定数項 1 に注目して，後者の解法を採用しました。

2　　問題のページへ

(1)　まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

　さて，さいころを投げ，出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 A_1A_2，4 のときは文字 B, 5 のときは文字 C, 6 のときは文字 D を，すでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回さいころを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2 の確率をそれぞれ p_n，q_n，そして B または C または D である確率を r_n とおく。

　すると，$p_1 = r_1 = \dfrac{1}{2}$，$q_1 = 0$ で，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1} = p_n \cdots\cdots\cdots②$$

　①より，$p_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n + r_n) = \dfrac{1}{2}(1 - p_n) = -\dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right),\quad p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

　よって，$p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，②より，$n \geqq 2$ において，

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

　なお，この式は，$n = 1$ のときも満たしている。

　以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 $p_n + q_n$ は，

$$p_n + q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解　説］

　直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，B または C または D をまとめ，3 つの状態に分けて考えたわけです。文系に類題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　$x>0$ で，$y=ax^p$ ……①，$y=\log x$ ……②に対し，$f(x)=ax^p-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=apx^{p-1}-\frac{1}{x}=\frac{apx^p-1}{x}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

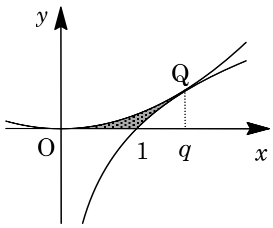
x	0	$\cdots$	$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

さらに $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^p}{\log x}-1\right)\log x=\infty$ から，曲線①と②の共有点が 1 点のみである条件，すなわち $f(x)=0$ がただ 1 つの解をもつ条件は，

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\log\frac{1}{ap}=0$$

よって，$\dfrac{1}{ap}=e$ から $a=\dfrac{1}{ep}$ となり，共有点 Q の x 座標は $\left(\dfrac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$ である。

(2)　$q=e^{\frac{1}{p}}$ とおき，曲線①と②と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とすると，



$$V=\pi\int_0^q(ax^p)^2dx-\pi\int_1^q(\log x)^2dx$$

ここで $I_1=\displaystyle\int_0^q(ax^p)^2dx$，$I_2=\displaystyle\int_1^q(\log x)^2dx$ とおくと，

$$I_1=\frac{a^2}{2p+1}\Big[x^{2p+1}\Big]_0^q=\frac{1}{e^2p^2(2p+1)}\left(e^{\frac{1}{p}}\right)^{2p+1}=\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}$$

$$I_2=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^q-2\int_1^q\log x\,dx=q(\log q)^2-2\Big[x\log x\Big]_1^q+2\int_1^q dx$$

$$=q(\log q)^2-2q\log q+2q-2=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)e^{\frac{1}{p}}-2$$

よって，$V=\pi\left\{\left(\dfrac{1}{p^2(2p+1)}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{2}{p}-2\right)e^{\frac{1}{p}}+2\right\}=\pi\left(-\dfrac{4p-2}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+2\right)$

(3)　条件より $V=2\pi$ なので，$\dfrac{4p-2}{2p+1}=0$ となり，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

曲線①と②の共有点が 1 点のみのとき，その点において 2 曲線は共通接線をもつだろうと思えますが，ただ感覚的に立式すると危ないケースもありますので，この点は無視しました。問題文から匂ってくる出題意図を推察したわけです。なお，(2)の図は $p>1$ の場合に対応しています。

4　　問題のページへ

(1)　$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}\\
&=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}\\
&=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n
\end{aligned}
$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3$ となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ ………①

(2)　すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$p_1=1$，$p_2=2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<p_k<p_{k+1}$ すなわち $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$ から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ ………②

${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ………③

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$ より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$ なので，

$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

(3)　(2)より，$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$
\begin{aligned}
q_{2k+3}&=q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}\\
&=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1}
\end{aligned}
$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

［解 説］

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

5

問題のページへ

m を 2015 以下の正の整数とするとき,

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{{}_{2015}\mathrm{P}_m}{m!}=\frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\frac{2012}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が偶数になる最小の m の値は,「m が偶数かつ $\dfrac{2016-m}{m}=\dfrac{2016}{m}-1$ が初めて偶数」となる値である。すなわち「m が偶数かつ $\dfrac{2016}{m}$ が初めて奇数」となる値である。

すると, $2016=2^5\times63$ より, 求める m の値は, $m=2^5=32$ である。

［解 説］

まず, 実験をして, $(*)$の分子と分母の素因数 2 の個数に注目しました。たとえば, $(2014,\ 2)\to(1,\ 1)$, $(2012,\ 4)\to(2,\ 2)$, $(2010,\ 6)\to(1,\ 1)$, $(2008,\ 8)\to(3,\ 3)$ という具合です。すると, これらの分数は約分すると, すべて奇数となります。その状態が破綻する最小の m を探すという手順で考えたわけです。16 列の表を作って直接的に示した方が明快だったかもしれませんが……。

6

問題のページへ

(1)　$g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ ($|x|\leqq 1$ のとき)，$g(x)=0$ ($|x|>1$ のとき) より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q$ $\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$から，

(i)　$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii)　$|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ ($|x|\leqq 1$ のとき)，$h(x)=0$ ($|x|>1$ のとき) より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)dx=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$$

そして，$f(x)$は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -J_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\ \ -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq J_n\leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{e}{1+e}$

［解　説］

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$という$g(x)$と$h(x)$の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。