**1**

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 $P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $P(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

**2**

解答解説のページへ

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　$k$ 試合目で優勝チームが決まらない場合は，$k$ 試合目の勝者と，$k$ 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで $k$ は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　$n$ を 2 以上の整数とする。ちょうど $n$ 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　$m$ を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標平面上の 2 つの放物線 $A: y = x^2$， $B: y = -x^2 + px + q$ が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで, $p$ と $q$ は実数である。さらに, $t$ を正の実数とし, 放物線 $B$ を $x$ 軸の正の向きに $2t$, $y$ 軸の正の向きに $t$ だけ平行移動して得られる放物線を $C$ とする。

(1) $p$ と $q$ の値を求めよ。

(2) 放物線 $A$ と $C$ が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし, $A$ と $C$ が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　$n$ を正の整数とし，$3^n$ を 10 で割った余りを $a_n$ とする。$a_n$ を求めよ。

(2)　$n$ を正の整数とし，$3^n$ を 4 で割った余りを $b_n$ とする。$b_n$ を求めよ。

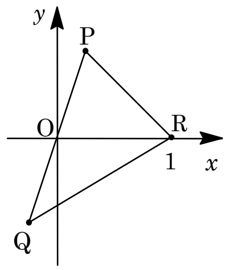
(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$x_{10}$ を 10 で割った余りを求めよ。

**1**

問題のページへ




3点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-(x+1,\ y)$$

条件より，$\triangle\mathrm{PQR}$ は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\neq\vec{0}$ となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

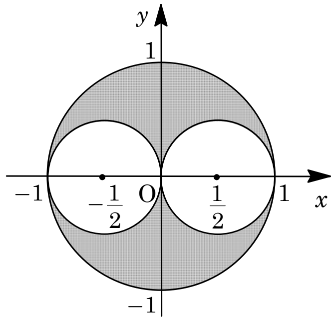
この条件のもとで，$\angle\mathrm{RPQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}>0$ となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{PQR}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}<0$ となり，

$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots②$$




さらに，$\angle\mathrm{PRQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0$ となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

$$x^2+y^2<1\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

［解　説］

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

## 2

問題のページへ

(1) 5 試合目で A が優勝するのは，4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず，しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで，各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと，

(i) 1 試合目に A が勝つとき　ACBAA の場合となり，その確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii) 1 試合目に B が勝つとき　BCAB…となり，この場合は不適。

(i)(ii)より，5 試合目で A が優勝する確率は$\frac{1}{32}$である。

(2) $n$ 試合目$(n\geqq 2)$で A が優勝する場合，その確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^n$である。

(i) 1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で，$n$ を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii) 1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で, $n$ を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより，$n$ 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると，

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n (n\text{ が 3 の倍数でないとき}),\ \ p(n)=0\ (n\text{ が 3 の倍数のとき})$$

(3) $l$ を正の整数とするとき，(2)より，

(i) $n$ を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii) $n$ を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii) $n$ を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき　$p(n)=0$

さて，$m$ を正の整数とするとき，総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を $P_m$ とすると，$m\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}P_m&=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}\\&=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\&=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\end{aligned}$$

ここで，$m=1$ をあてはめると，$P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ となり，成立している。

したがって，$P_m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

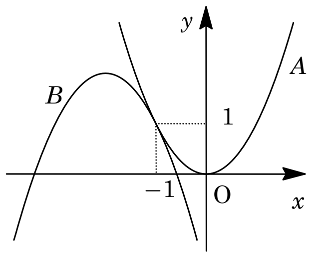
［解 説］

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

## 3

問題のページへ

(1)　放物線 $A: y = x^2$ ……①，$B: y = -x^2 + px + q$ ……②




に対して，①②を連立すると，

$$x^2 = -x^2 + px + q\ ,\ \ 2x^2 - px - q = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

$A$ と $B$ が点$(-1,\ 1)$で接していることより，③から，

$$D = p^2 + 8q = 0,\ \ x = \frac{p}{4} = -1$$

よって，$p = -4$，$q = -2$

(2)　(1)より，$B: y = -x^2 - 4x - 2$ となり，$t > 0$ のとき，放物線 $B$ を $x$ 軸の正の向きに $2t$, $y$ 軸の正の向きに $t$ だけ平行移動して得られる放物線 $C$ は,

$$y - t = -(x - 2t)^2 - 4(x - 2t) - 2$$

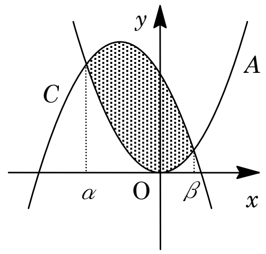
$$y = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2 \cdots\cdots\cdots④$$

そこで，①④を連立すると，$x^2 = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2$ から

$$2x^2 - (4t - 4)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，⑤から $D/4 = (2t^2 - 2) - 2(4t^2 - 9t + 2) = -4t^2 + 10t$ なので,

(i)　$-4t^2 + 10t > 0\ \left(0 < t < \frac{5}{2}\right)$ のとき　⑤から交点は,




$$x = \frac{2t - 2 \pm \sqrt{-4t^2 + 10t}}{2}$$

この値を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと, $A$ と $C$ が囲む領域の面積 $S(t)$ は,

$$S(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2 - x^2\}dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} -2(x - \alpha)(x - \beta)dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$-4t^2 + 10t \leqq 0\ \left(t \geqq \frac{5}{2}\right)$ のとき　$A$ と $C$ は領域を囲まないので，$S(t) = 0$

(3)　(2)より，$-4t^2 + 10t = -4\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}$ であり，$S(t)$ は $t > 0$ で連続なので，$t = \frac{5}{4}$ のとき最大となる。その最大値は,

$$S\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8} = \frac{125}{24}$$

### ［解　説］

定積分と面積について，センター試験でよく問われるタイプの基本題です。

## 4

問題のページへ

(1)　$3^n$ を 10 で割った余りを $a_n$ とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n = 3$ ($n$ を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n = 9$ ($n$ を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n = 7$ ($n$ を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n = 1$ ($n$ を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2)　$3^n$ を 4 で割った余りを $b_n$ とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，$3^{n+2}$ と $3^n$ の関係を調べると，

$$3^{n+2} = 9\cdot 3^n = (4\cdot 2+1)\cdot 3^n = 4\cdot 2\cdot 3^n + 3^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，$3^{n+2}$ を 4 で割った余りと $3^n$ を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n = 3$ ($n$ を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n = 1$ ($n$ を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3)　$x_1 = 1$，$x_{n+1} = 3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3,\ x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27,\ x_4 = 3^{x_3} = 3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に $x_n$ は奇数である。

よって，(2)の結論から，$3^{x_n}$ を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，$x_n$ ($n \geqq 2$) を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，$3^{x_n}$ を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，$x_n$ ($n \geqq 3$) を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，$x_{10}$ を 10 で割った余りは 7 である。

### ［解 説］

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が，(3)でうまく利用できる誘導となっています。