1

解答解説のページへ

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

2

解答解説のページへ

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を $1 < a < 3$ を満たす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め, 図示せよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1)　次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。

6

解答解説のページへ

座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a), (b)を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $C(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる領域を K とする。K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

1

問題のページへ

まず，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}<1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}<e\cdots\cdots\cdots$①

また，$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e\cdots\cdots\cdots$②

したがって，①②より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

［解　説］

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

2

問題のページへ

(1) n 試合目($n \geqq 2$)で A が優勝する場合，その確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^n$である。そこで，各試合の勝者を1試合目から並べて書くと，

(i) 1試合目にAが勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で，n を3で割った余りは2となる。

(ii) 1試合目にBが勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で，n を3で割った余りは1となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより，n 試合目でAが優勝する確率を $p(n)$ とすると，

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n\text{ が }3\text{ の倍数でないとき}),\ \ p(n) = 0\,(n\text{ が }3\text{ の倍数のとき})$$

(2) l を正の整数とするとき，(1)より，

(i) n を3で割った余りが2 $(n = 3l-1)$ のとき　$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii) n を3で割った余りが1 $(n = 3l+1)$ のとき　$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii) n を3で割った余りが0 $(n = 3l)$ のとき　$p(n) = 0$

さて，m を正の整数とするとき，総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m，そのときAの最後の対戦相手がBである確率 $P_m{}'$ とすると，$m \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
P_m &= \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1} + 0 = 2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}\\
&= 2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\
&= \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\} + \frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\} = \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m = \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}
\end{aligned}$$

$$P_m{}' = \sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1} = \frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\} = \frac{1}{14} - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

ここで，$m = 1$ をあてはめると，$P_1 = \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$，$P_1{}' = \frac{1}{14} - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0$ となり，ともに成立している。

したがって，Aが優勝したとき，Aの最後の対戦相手がBである条件付き確率は，

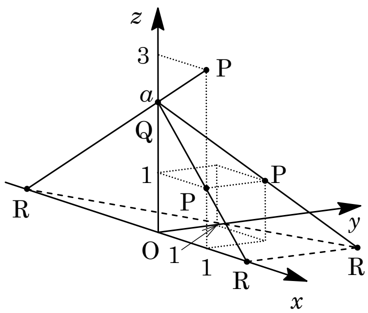
$$\frac{P_m{}'}{P_m} = \frac{\frac{1}{14} - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{\frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}} = \frac{1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}} = \frac{2^{3m} - 8}{5\cdot 2^{3m} - 12}$$

［解　説］

巴戦を題材にした有名問題です。条件付き確率の部分を除くと，文理共通です。

$\boxed{3}$

問題のページへ



$1<a<3$ のとき，点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ に対し，まず直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_1 は，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$ を $1:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_1\left(\dfrac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right)$ となる。

また，直線 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_2 は，線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$ を $1:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_2\left(\dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$ となる。

さらに，直線 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_3 は，線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ を $3:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_3\left(-\dfrac{a}{3-a},\ 0,\ 0\right)$ となる。

すると，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\perp\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3$ で，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2=\dfrac{a}{a-1}$，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3=\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{a}{3-a}$ から，$\triangle\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ は，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a-1}\left(\frac{a}{a-1}+\frac{a}{3-a}\right)=\frac{a}{2(a-1)}\cdot\frac{2a}{(a-1)(3-a)}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

$$S'(a)=\frac{2a(a-1)^2(3-a)-a^2\{2(a-1)(3-a)-(a-1)^2\}}{(a-1)^4(3-a)^2}$$

$$=\frac{2a(a-1)(3-a)-a^2\{2(3-a)-(a-1)\}}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$$=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$$=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	4	↗	

これより，$S(a)$ の増減は右表のようになり，$a=2$ のとき最小値 $S(2)=4$ をとる。

［解　説］

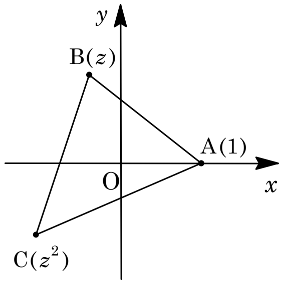
空間座標に関する問題です。$\triangle\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ が直角三角形なので，その面積は立式しやすく，また後半の最小値を求める計算も複雑ではありません。

4

問題のページへ

3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) に対し，△ABC は鋭角三角形より，まず $z\neq 1$ かつ $z^2\neq z$ かつ $z^2\neq 1$ より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$



さて，$\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は点 -1 を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

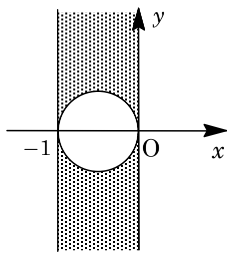
すると，$-z$ は虚軸の右側にあるので，z は虚軸の左側にある。

さらに，$\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は原点と点 -1 を直径とする円の外部にある。

以上より，z の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



［解　説］

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\alpha = 0.a_1a_2\cdots a_k = \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{a_k}{10^k}$ $(a_k \neq 0)$ とおくと，$0 < \alpha < 1$ である。

さて，条件より，$\alpha \leqq \sqrt{n} - 10^k < \alpha + 10^{-k}$，$10^k + \alpha \leqq \sqrt{n} < 10^k + \alpha + 10^{-k}$ となり，

$$(10^k + \alpha)^2 \leqq n < (10^k + \alpha + 10^{-k})^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$(10^k + \alpha)^2 = 10^{2k} + 2\alpha\cdot 10^k + \alpha^2$ となり，$0 < \alpha^2 < 1$ で，

$$2\alpha\cdot 10^k = 2\Big(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}\Big)\cdot 10^k = 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k)$$

すると，①から，$n \geqq 10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 1 \cdots\cdots\cdots ②$

また，$(10^k + \alpha + 10^{-k})^2 = 10^{2k} + 2(\alpha + 10^{-k})\cdot 10^k + (\alpha + 10^{-k})^2$

ここで，$0 < \alpha + 10^{-k} \leqq 1$ より，$0 < (\alpha + 10^{-k})^2 \leqq 1$ であり，

$$2(\alpha + 10^{-k})\cdot 10^k = 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 2$$

すると，①から，$n < 10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 3 \cdots\cdots\cdots ③$

よって，②③から，求める正の整数 n は，

$$n = 10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 1$$
$$n = 10^{2k} + 2(10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + \cdots + a_k) + 2$$

(2)　条件より，$\alpha \leqq \sqrt{m} - p < \alpha + 10^{-k}$ から $(p + \alpha)^2 \leqq m < (p + \alpha + 10^{-k})^2 \cdots\cdots\cdots ④$

ここで，$d = (p + \alpha + 10^{-k})^2 - (p + \alpha)^2$ とおくと，$p \geqq 5\cdot 10^{k-1}$ なので，

$$d = 2(p + \alpha)\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} \geqq 2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k} + 2\alpha\cdot 10^{-k} + 10^{-2k} > 1$$

よって，④を満たす正の整数 m が存在する。

(3)　$\sqrt{s} = [\sqrt{s}] + \alpha$　(ただし α は $0 < \alpha < 1$ を満たす有限小数)……⑤と仮定する。

(i)　s が平方数のとき　$\sqrt{s} = [\sqrt{s}]$ となり，$\alpha = 0$ から⑤は成立しない。

(ii)　s が平方数でないとき　α は $0 < \alpha < 1$ を満たす有限小数なので $\sqrt{s}$ は有理数となり，p, q を互いに素な自然数として，$\sqrt{s} = \dfrac{q}{p}$ $(p \geqq 2)$ と表すことができる。

すると，$q^2 = sp^2$ となり，p, q が互いに素より $p^2 = 1$ すなわち $p = 1$ であるが，これは $p \geqq 2$ に反するので，⑤は成立しない。

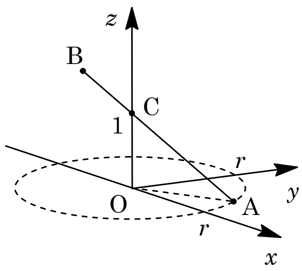
(i)(ii)より，$\sqrt{s} = [\sqrt{s}] + \alpha$ を満たす正の整数 s は存在しない。

［解 説］

有限小数が題材となっている整数問題です。(3)では，$\sqrt{s}$ は整数か無理数ということから 2 つに場合分けをしましたが，記述を少し変えると，必須というわけではありません。ただ，(1), (2)との直接的な関係はなさそうですが。

6

問題のページへ



xy 平面上の点 A を，$r\geqq 0$ として $A(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ とおくと，$B(x,\ y,\ z)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ に対して，条件から，$AB=2$，$AC=\sqrt{r^2+1}$ より $BC=2-\sqrt{r^2+1}$ となる。

点 B は AC を $2:(2-\sqrt{r^2+1})$ に外分することから，

$$x=\frac{r\cos\theta(\sqrt{r^2+1}-2)}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{r\sin\theta(\sqrt{r^2+1}-2)}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots②,\quad z=\frac{2}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots③$$

なお，$2-\sqrt{r^2+1}\geqq 0$ より $r^2+1\leqq 4$ となり，$0\leqq r\leqq\sqrt{3}$ ……④である。

ここで，線分 AB が通過してできる領域 K の $z\geqq 1$ の部分は，線分 BC の通過領域であり，すなわち $z\geqq 1$ における点 B の描く曲面で囲まれた立体の内部となる。

さて，①②より $x^2+y^2=\dfrac{r^2(\sqrt{r^2+1}-2)^2}{r^2+1}\cdots\cdots\cdots⑤$

③から，$r^2+1=\dfrac{4}{z^2}$ となり，⑤に代入すると，$x^2+y^2=\dfrac{\left(\frac{4}{z^2}-1\right)\left(\frac{2}{z}-2\right)^2}{\frac{4}{z^2}}$ より，

$$x^2+y^2=\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，⑥で表される点 B の描く曲面を，平面 $z=k$ で切断したとき，その切り口は，$z=k$ 上で $x^2+y^2=\dfrac{(4-k^2)(1-k)^2}{k^2}$ と表すことができ，変形すると，

$$x^2+y^2=\frac{-k^4+2k^3+3k^2-8k+4}{k^2},\quad x^2+y^2=-k^2+2k+3-\frac{8}{k}+\frac{4}{k^2}$$

この円の面積を $S(k)$ とおくと，$S(k)=\pi\left(-k^2+2k+3-\dfrac{8}{k}+\dfrac{4}{k^2}\right)$ となり，求める線分 BC の通過領域の体積 V は，③④から $1\leqq k\leqq 2$ に留意すると，

$$V=\int_1^2 S(k)dk=\pi\int_1^2\left(-k^2+2k+3-\frac{8}{k}+\frac{4}{k^2}\right)dk$$

$$=\pi\Big[-\frac{k^3}{3}+k^2+3k-8\log k-\frac{4}{k}\Big]_1^2=\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi$$

［解　説］

条件を満たす空間図形を求め，その体積を計算する問題です。解答例では方程式を利用した処理をしましたが，$\theta=0$ のときの点 B の軌跡をもとにしても可能です。