$\boxed{1}$　解答解説のページへ

実数 a, b に対して，$f(\theta)=\cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$ とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数 $g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta - 1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Pを考える。

(a)　最初に，点Pは原点Oにある。

(b)　ある時刻で点Pが格子点$(m,\ n)$にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点$(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

(1)　点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点Pが，最初から6秒後に原点Oにある確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1)　αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線をLとする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 $C,\ D$ の共通接線について考える。

$$C: y = x^2 + k,\quad D: x = y^2 + k$$

(1)　直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ に対して，$x=\cos\theta$ とおくと，

$$f(\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta+a(2\cos^2\theta-1)+b\cos\theta$$
$$=4x^3-3x+a(2x^2-1)+bx=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a$$

また，$0<\theta<\pi$ のとき，$g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ に対して，

$$g(\theta)=\frac{4x^3+2ax^2+(b-3)x-a-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)\{4x^2+(2a+4)x+2a+b+1\}}{x-1}=4x^2+(2a+4)x+2a+b+1$$

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとる条件は，$h(x)=g(\theta)$ とおくと，$h(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で最小値 0 をとる条件に対応するので，(1)より，

$$h(x)=4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{(a+2)^2}{4}+2a+b+1$$
$$=4\left(x+\frac{a+2}{4}\right)^2+\frac{-a^2+4a+4b}{4}$$

(i)　$-\dfrac{a+2}{4}\leqq -1$，$1\leqq -\dfrac{a+2}{4}$ $(a\leqq -6,\ 2\leqq a)$ のとき

$-1<x<1$ で，$h(x)$ の最小値は存在しないので，不適である。

(ii)　$-1<-\dfrac{a+2}{4}<1$ $(-6<a<2)$ のとき

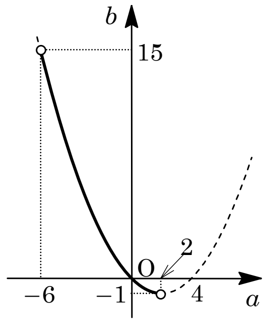
$-1<x<1$ の範囲で最小値 0 となる条件は，$\dfrac{-a^2+4a+4b}{4}=0$ から，

$$b=\frac{1}{4}a^2-a=\frac{1}{4}(a-2)^2-1$$

(i)(ii)より，求める a, b についての条件は，

$$-6<a<2,\ b=\frac{1}{4}(a-2)^2-1$$

また，点 $(a,\ b)$ が描く図形は，右図の放物線の太線部となる。ただし，両端点は含まない。



［解 説］

三角関数で味付けされた 2 次関数の最大・最小問題です。なお，(i)の場合について，開区間において最小値が存在しないことは，注意すべきところです。

2

問題のページへ

(1) 点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ A, B, C, D とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回, b 回, c 回, d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-d=a-c\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots③,\ \ a-c=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ b-d=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　条件より，$z \neq 0$ のとき $w = \dfrac{1}{z}$ から，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$………①

さて，点 z が点 α $(\alpha \neq 0)$ と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき，

$$|z| = |z - \alpha| \text{………②}$$

①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w} - \alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|1 - \alpha w|}{|w|}$ となり，

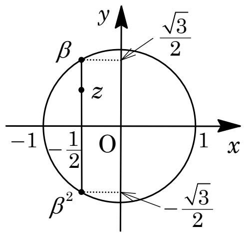
$$|1 - \alpha w| = 1,\ |-\alpha|\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = 1,\ \left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし，$w \neq 0$ より，原点は除く。

(2)　$x^3 = 1$ の解は，$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ より，$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

すると，条件より，$\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となる。

ここで，点 β と点 β^2 を結ぶ直線は，(1)で $\alpha = -1$ として表すことができるので，点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき，



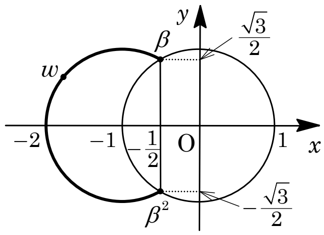
$$|z| = |z+1| \text{………③},\ |z| \leqq 1 \text{………④}$$

①③より，$|w+1| = 1$ $(w \neq 0)$………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right| \leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{|w|} \leqq 1$ から，$|w| \geqq 1$………⑥

⑤⑥より，点 w の軌跡は，点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点 β，β^2 は含む。



［解 説］

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

4

問題のページへ

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\quad(b_{n+1}',\ b_n'\text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

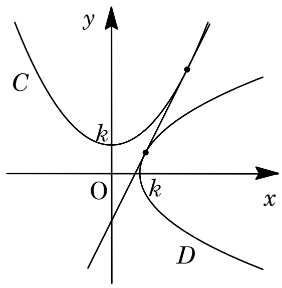
以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解 説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば，昨年は神戸大・理で類題が出ています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　放物線 $C: y = x^2 + k$ ……①，$D: x = y^2 + k$ ……②に対して，共通接線を $y = ax + b\ (a \neq -1)$ ……③とする。

①③を連立すると，$x^2 + k = ax + b$ となり，

$x^2 - ax + k - b = 0$

重解をもつので，$D = a^2 - 4(k - b) = 0$ となり，

$4b = 4k - a^2$ ………④

②③を連立すると，$y = a(y^2 + k) + b$ となり，

$ay^2 - y + ak + b = 0$

ここで，$a = 0$ とすると，③は x 軸に平行になり D には接しない。

よって，$a \neq 0$ で重解をもつので，$D = 1 - 4a(ak + b) = 0$ となり，

$1 - 4a^2k - 4ab = 0$ ………⑤

④⑤より，$1 - 4a^2k - a(4k - a^2) = 0$，$4a(a+1)k - (a^3 + 1) = 0$ ………⑥

$a \neq -1$ から，$k = \dfrac{a^3 + 1}{4a(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{4a(a+1)} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$

④から，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a}$

(2)　$a = 2$ のとき，(1)より，$k = \dfrac{4 - 2 + 1}{8} = \dfrac{3}{8}$ となる。

このとき，C と D の共通接線を $y = mx + n$ とおくと，④⑥より，

$4n = \dfrac{3}{2} - m^2$ ………⑦，$\dfrac{3}{2}m(m+1) - (m^3 + 1) = 0$ ………⑧

⑧より，$3m(m+1) - 2(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$ となり，

$(m+1)(2m^2 - 5m + 2) = 0$，$(m+1)(m-2)(2m-1) = 0$

よって，$m = -1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$ となり，共通接線は 3 本存在する。

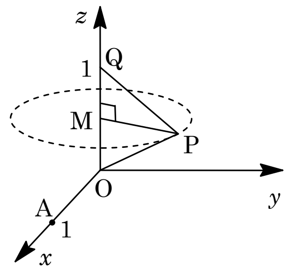
$m = -1$ のとき⑦より $n = \dfrac{1}{8}$，$m = 2$ のとき⑦より $n = -\dfrac{5}{8}$，$m = \dfrac{1}{2}$ のとき⑦より $n = \dfrac{5}{16}$ となるので，共通接線の傾きと y 切片の組$(m,\ n)$は，

$(m,\ n) = \left(-1,\ \dfrac{1}{8}\right)$，$\left(2,\ -\dfrac{5}{8}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{16}\right)$

［解　説］

放物線 C と D は直線 $y = x$ について対称です。このことから，(2)で共通接線が 3 本あれば，その傾きは 2 と $\dfrac{1}{2}$ と -1 であることがわかります。なお，混乱を防ぐために，共通接線を $y = mx + n$ と設定しています。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ



(1) 原点 O, 点 Q$(0,\ 0,\ 1)$ に対して, 線分 OQ の中点を M とすると, $\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。

さて, 座標空間内で, 1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき, $\mathrm{PM} \perp \mathrm{OQ}$, $\mathrm{PM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より, 点 P の座標は, φ を $0° \leqq \varphi < 360°$ として, $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおくことができる。すると, 点 P の x 座標がとりうる値の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また, 点 A$(1,\ 0,\ 0)$ に対して, $\angle\mathrm{AOP} = \theta\ (0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = 1\cdot 1\cdot\cos\theta$$

よって, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$ となり, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $30° \leqq \theta \leqq 150°$ である。

(2) (1)から, Q$(0,\ 0,\ 1)$ のとき, 辺 OP が通過してできる図形は, 頂点が原点で, 中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして, 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動く, すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき, 辺 OP が通過してできる図形 K は, 円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて, 円錐側面 C 上の任意の点を X$(x,\ y,\ z)$ とおくと, $\angle\mathrm{QOX} = \dfrac{\pi}{3}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}} = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\ \ z = 1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

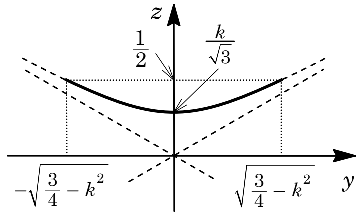
$0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}$ から, 両辺を 2 乗すると, $4z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ となり,

$$3z^2 = x^2 + y^2\ \ \left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, 円錐側面 C を, x 軸に垂直な平面 $x = k$ で切断したときの切り口を考える。ただし, (1)から, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

すると, $(*)$から, $3z^2 = k^2 + y^2$ となり,

$$y^2 - 3z^2 = -k^2\ \ \left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)$$



$k \neq 0$ のときは双曲線の一部となり, 平面 $x = k$ 上に図示すると, 右図の太線部のようになる。

さらに, この双曲線（太線部）を点$(k,\ 0,\ 0)$ のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R, 内径を r, 面積を $S(k)$ とおくと,

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-k^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-k^2},\ \ r=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(1-k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k=0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解 説］

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。