

1

解答解説のページへ

関数  $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x$  ( $0 < x < \pi$ ) の増減表をつくり、 $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow \pi - 0$  のときの極限を調べよ。

**2**

解答解説のページへ

数列  $a_1, a_2, \dots$  を,  $a_n = \frac{2n+1}{n!} C_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) で定める。

- (1)  $n \geq 2$  とする。  $\frac{a_n}{a_{n-1}}$  を既約分数  $\frac{q_n}{p_n}$  として表したときの分母  $p_n \geq 1$  と分子  $q_n$  を求めよ。
- (2)  $a_n$  が整数となる  $n \geq 1$  をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

放物線  $y = x^2$  のうち  $-1 \leq x \leq 1$  を満たす部分を  $C$  とする。座標平面上の原点  $O$  と点  $A(1, 0)$  を考える。 $k > 0$  を実数とする。点  $P$  が  $C$  上を動き、点  $Q$  が線分  $OA$  上を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$  を満たす点  $R$  が動く領域の面積を  $S(k)$  とする。 $S(k)$  および  $\lim_{k \rightarrow +0} S(k)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a > 0$  とし、 $f(x) = x^3 - 3a^2x$  とおく。次の 2 条件を満たす点  $(a, b)$  の動きうる範囲を求め、座標平面上に図示せよ。

条件 1 : 方程式  $f(x) = b$  は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2 : さらに、方程式  $f(x) = b$  の解を  $\alpha < \beta < \gamma$  とすると  $\beta > 1$  である。

5

解答解説のページへ

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。点  $P(z)$  は  $C$  上にあり、点  $A(1)$  とは異なるとする。点  $P$  における円  $C$  の接線に関して、点  $A$  と対称な点を  $Q(u)$  とする。 $w = \frac{1}{1-u}$  とおき、 $w$  と共役な複素数を  $\bar{w}$  で表す。

- (1)  $u$  と  $\frac{\bar{w}}{w}$  を  $z$  についての整式として表し、絶対値の商  $\frac{|w + \bar{w} - 1|}{|w|}$  を求めよ。
- (2)  $C$  のうち実部が  $\frac{1}{2}$  以下の複素数で表される部分を  $C'$  とする。点  $P(z)$  が  $C'$  上を動くときの点  $R(w)$  の軌跡を求めよ。

6

解答解説のページへ

座標空間内の 4 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $C(1, 1, 1)$  を考える。  
 $\frac{1}{2} < r < 1$  とする。点  $P$  が線分  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$  上を動くときに点  $P$  を中心とする半径  $r$  の球（内部を含む）が通過する部分を、それぞれ  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  とする。

- (1) 平面  $y=t$  が  $V_1$ ,  $V_3$  双方と共有点をもつような  $t$  の範囲を与えよ。さらに、この範囲の  $t$  に対し、平面  $y=t$  と  $V_1$  の共通部分および平面  $y=t$  と  $V_3$  の共通部分を同一平面上に図示せよ。
- (2)  $V_1$  と  $V_3$  の共通部分が  $V_2$  に含まれるための  $r$  についての条件を求めよ。
- (3)  $r$  は(2)の条件を満たすとする。 $V_1$  の体積を  $S$  とし、 $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積を  $T$  とする。 $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  を合わせて得られる立体  $V$  の体積を  $S$  と  $T$  を用いて表せ。
- (4) ひきつづき  $r$  は(2)の条件を満たすとする。 $S$  と  $T$  を求め、 $V$  の体積を決定せよ。

1

問題のページへ

$0 < x < \pi$ において、 $f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x$ に対し、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x - x \cos x - \sin^3 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x (\sin x \cos x - x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x (\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

ここで、 $g(x) = \sin 2x - 2x$ とおくと、 $g'(x) = 2\cos 2x - 2$ となり、

$$g'(x) < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

すると、 $0 < x < \pi$ において、 $g(x) < g(0) = 0$

から、 $f(x)$ の増減は右表のようになり、

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{x}{\sin x} + \cos x \right) = 2$$

$x$	0	⋯	$\frac{\pi}{2}$	⋯	$\pi$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	

また、 $x - \pi = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) &= \lim_{t \rightarrow -0} \left\{ \frac{t + \pi}{\sin(t + \pi)} + \cos(t + \pi) \right\} = \lim_{t \rightarrow -0} \left( -\frac{t + \pi}{\sin t} - \cos t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -0} \left( -\frac{t}{\sin t} - \frac{\pi}{\sin t} - \cos t \right) = \infty \end{aligned}$$

### [解説]

微分法の基本問題です。なお、 $\sin 2x < 2x$  ( $0 < x < \pi$ )については、グラフを対応させたり、図を描いたり、という方法もあります。同じことですが……。

2

問題のページへ

$$(1) a_n = \frac{{}^{2n+1}C_n}{n!} = \frac{{}^{2n+1}P_n}{(n!)^2} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!} \text{ に対して, } n \geq 2 \text{ のとき,}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!} \cdot \frac{\{(n-1)!\}^2 n!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1) \cdot 2n}{n \cdot (n+1)n} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ここで,  $n$  と  $2n+1$  の最大公約数を  $g_1$ ,  $i$  と  $j$  を自然数とすると,

$$n = g_1 i, \quad 2n+1 = g_1 j$$

すると,  $1 = g_1(j-2i)$  となり  $g_1 = 1$ , すなわち  $n$  と  $2n+1$  は互いに素である。

また,  $n+1$  と  $2n+1$  の最大公約数を  $g_2$ ,  $k$  と  $l$  を自然数とすると,

$$n+1 = g_2 k, \quad 2n+1 = g_2 l$$

すると,  $1 = g_2(2k-l)$  となり  $g_2 = 1$ , すなわち  $n+1$  と  $2n+1$  は互いに素である。

さらに,  $n(n+1)$  が偶数であることより  $\frac{n(n+1)}{2}$  は自然数となり, また

$\frac{n(n+1)}{2}$  と  $2n+1$  は互いに素なので, 既約分数を用いて  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{q_n}{p_n}$  と表したとき,

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad q_n = 2n+1$$

$$(2) \text{ まず, } \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \text{ とすると, } 2(2n+1) < n(n+1) \text{ から, } n^2 - 3n - 2 > 0$$

$n \geq 2$  より  $n > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$  となり,  $n$  は 4 以上の整数となる。

これより,  $n \geq 4$  のとき  $a_n < a_{n-1}$  となり,  $a_3 > a_4 > a_5 > \dots > 0$  であり,

$$a_1 = \frac{{}_3P_1}{(1!)^2} = 3, \quad a_2 = \frac{{}_5P_2}{(2!)^2} = 5, \quad a_3 = \frac{{}_7P_3}{(3!)^2} = \frac{35}{6}, \quad a_4 = \frac{{}_9P_4}{(4!)^2} = \frac{21}{4}$$

$$a_5 = \frac{{}_{11}P_5}{(5!)^2} = \frac{77}{20}, \quad a_6 = \frac{{}_{13}P_6}{(6!)^2} = \frac{143}{60}, \quad a_7 = \frac{{}_{15}P_7}{(7!)^2} = \frac{143}{112}$$

$$a_8 = \frac{{}_{17}P_8}{(8!)^2} = \frac{2413}{4032} < 1$$

よって,  $1 > a_8 > a_9 > \dots > 0$  となるので,  $a_n$  が整数となるのは  $n=1, 2$  である。

### [解説]

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導の丁寧な類題が文系で出ており, それに引きずられた解法です。数値計算は少し面倒でした。漸化式を利用してもよかったです。



3

問題のページへ

$C: y = x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 上の点  $P(p, p^2)$  ( $-1 \leq p \leq 1$ ), 線分  $OA$  上の点  $Q(q, 0)$  ( $0 \leq q \leq 1$ ) に対して,  $k > 0$  のとき,

$$\overline{OR} = \frac{1}{k}\overline{OP} + k\overline{OQ} = \frac{1}{k}(p, p^2) + k(q, 0)$$

ここで,  $R(x, y)$  とおくと,  $x = \frac{p}{k} + kq \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $y = \frac{p^2}{k} \cdots \cdots \textcircled{2}$  となる。

さて, まず  $q$  の値を固定し,  $\textcircled{1}$  から  $p = k(x - kq)$  を  $\textcircled{2}$  に代入して,

$$y = \frac{1}{k} \cdot k^2(x - kq)^2 = k(x - kq)^2 \quad \left(kq - \frac{1}{k} \leq x \leq kq + \frac{1}{k}\right) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

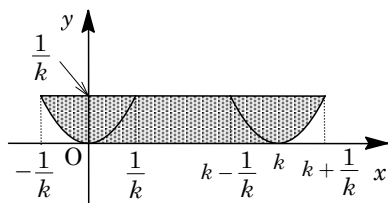
そして,  $q$  の値を  $0 \leq q \leq 1$  で動かすと,  $\textcircled{3}$  で表される放物線の一部は  $x$  軸方向に平行移動する。その頂点は原点から点  $(k, 0)$  まで動き,  $x$  の範囲は,

$$-\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \rightarrow k - \frac{1}{k} \leq x \leq k + \frac{1}{k}$$

これより, 点  $R$  が動く領域の面積  $S(k)$  は,

(i)  $\frac{1}{k} \leq k - \frac{1}{k}$  ( $k \geq \sqrt{2}$ ) のとき

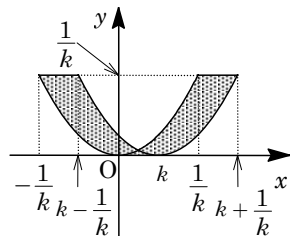
$$\begin{aligned} S(k) &= \left(k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k} - 2 \int_{-\frac{1}{k}}^0 kx^2 dx \\ &= 1 + \frac{2}{k^2} - \frac{2}{3} k \left[ x^3 \right]_{-\frac{1}{k}}^0 = 1 + \frac{4}{3k^2} \end{aligned}$$



(ii)  $\frac{1}{k} > k - \frac{1}{k}$  ( $0 < k < \sqrt{2}$ ) のとき

点  $R$  の動く領域が直線  $x = \frac{k}{2}$  について対称なので,

$$\begin{aligned} S(k) &= 2 \left\{ \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}} kx^2 dx + k \cdot \frac{1}{k} - \int_k^{k+\frac{1}{k}} k(x-k)^2 dx \right\} \\ &= \frac{2k}{3} \left[ x^3 \right]_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}} + 2 - \frac{2k}{3} \left[ (x-k)^3 \right]_k^{k+\frac{1}{k}} \\ &= \frac{2}{3k^2} - \frac{k^4}{12} + 2 - \frac{2}{3k^2} = 2 - \frac{k^4}{12} \end{aligned}$$



以上より,  $\lim_{k \rightarrow +0} S(k) = \lim_{k \rightarrow +0} \left( 2 - \frac{k^4}{12} \right) = 2$   $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{3k^2} \right) = 1$

### [解説]

軌跡を求める問題で, 東大で頻出の1文字固定をして考えるタイプです。

4

問題のページへ

$f(x) = x^3 - 3a^2x$  ( $a > 0$ ) に対して,

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2$$

$$= 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$  の増減は右表のようになる。

$x$	...	$-a$	...	$a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗

さて、方程式  $f(x) = b$  は相異なる 3 実数解をもち、その解を  $\alpha < \beta < \gamma$  とすると、 $\alpha < -a < \beta < a < \gamma$  である。

しかも、 $\beta > 1$  である条件は、右図から、

$$a > 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-2a^3 < b < f(1) = 1 - 3a^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、②の 2 つの境界線  $b = -2a^3$  と  $b = 1 - 3a^2$  の関係は、両式を連立すると、

$$-2a^3 = 1 - 3a^2, \quad 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0$$

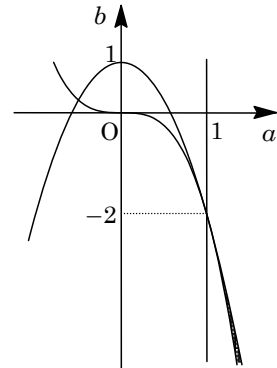
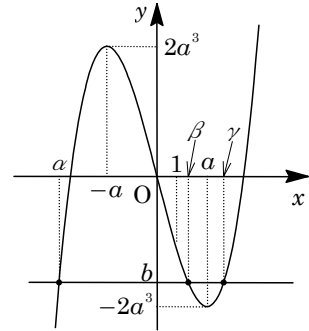
$$(2a+1)(a-1)^2 = 0$$

よって、 $a = -\frac{1}{2}$  で交わり、 $a = 1$  で接する。

以上より、点  $(a, b)$  の動きうる範囲は、①②から、

$$a > 1, \quad -2a^3 < b < 1 - 3a^2$$

この不等式を  $ab$  平面上に図示すると、右図の網点部になる。ただし、境界は領域に含まない。



[解説]

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

5

(1) 点  $P(z)$  は  $C$  上を動くので,  $|z|=1$  より  $z\bar{z}=1$  ……①また,  $AP=QP$  より,  $|z-1|=|z-u|$  ……②さらに,  $OP\parallel AQ$  より,  $k>0$  として,

$$u-1=kz \text{ ……③}$$

②③より,  $|z-1|=|(1-k)z-1|$  となり,

$$(z-1)(\bar{z}-1)=\{(1-k)z-1\}\{(1-k)\bar{z}-1\}$$

①を代入すると,  $1-z-\bar{z}+1=(1-k)^2-(1-k)z-(1-k)\bar{z}+1$  となり,

$$2=(1-k)^2+(z+\bar{z})k+1, \quad k^2+(z+\bar{z}-2)k=0$$

すると,  $k>0$  から,  $k=-(z+\bar{z}-2)$  となり, ①③から,

$$u=1-(z+\bar{z}-2)z=1-z^2-1+2z=-z^2+2z \text{ ……④}$$

さて, ④から  $u=-(z-1)^2+1$  となるので,  $1-u=(z-1)^2$  から,

$$w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

すると,  $\frac{\bar{w}}{w}=\frac{(z-1)^2}{(\bar{z}-1)^2}$  となり, ①から  $\bar{z}=\frac{1}{z}$  なので,

$$\frac{\bar{w}}{w}=\frac{(z-1)^2}{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2}=\frac{z^2(z-1)^2}{(1-z)^2}=z^2 \text{ ……⑤}$$

さらに,  $\frac{w+\bar{w}-1}{w}=1+\frac{\bar{w}}{w}-\frac{1}{w}=1+z^2-(z-1)^2=2z$  となり, ①より,

$$\frac{|w+\bar{w}-1|}{|w|}=\left|\frac{w+\bar{w}-1}{w}\right|=|2z|=2|z|=2 \text{ ……⑥}$$

(2) まず,  $P(z)$  が  $C$  上を動くとき, ⑥から,  $|w+\bar{w}-1|=2|w|$  となり,

$$\left|\frac{w+\bar{w}}{2}-\frac{1}{2}\right|=|w|$$

そこで,  $w=x+yi$  とおくと,  $\left|x-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$  から,

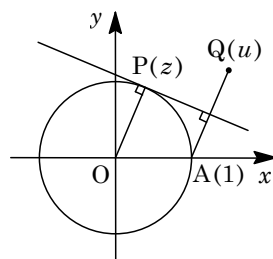
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2+y^2, \quad -x+\frac{1}{4}=y^2, \quad x=-y^2+\frac{1}{4} \text{ ……⑦}$$

さらに,  $P(z)$  が  $C$  の実部  $\frac{1}{2}$  以下の部分  $C'$  上に制限されて動く場合について, 放物線⑦の限界を求めるために,  $z=\cos\theta+i\sin\theta$  として,

$$\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\pi \text{ ……⑧}, \quad -\pi\leq\theta\leq-\frac{\pi}{3} \text{ ……⑨}$$

すると, ⑤から,  $\frac{\bar{w}}{w}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$  ……⑩これより, 点  $R(w)$ , 点  $S(\bar{w})$  とおくと,  $S(\bar{w})$  と  $R(w)$  は実軸対称であり, しかも  $S(\bar{w})$  は  $R(w)$  を原点まわりに  $2\theta$  だけ回転したものとなる。

問題のページへ

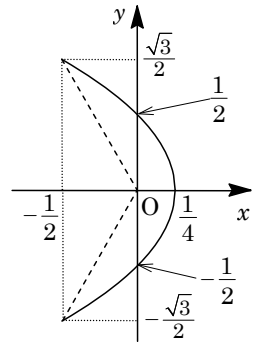
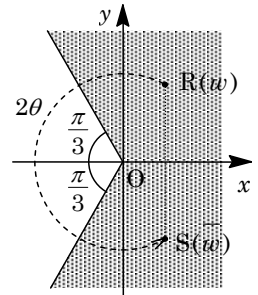


すると、⑧⑩より、 $\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$  のとき、 $R(w)$  のとり得る範囲は、右図の網点部について、実軸上または実軸の上側の領域である。

また、⑨⑩より、 $-2\pi \leq 2\theta \leq -\frac{2}{3}\pi$  のとき、 $R(w)$  のとり得る範囲は、右図の網点部について、実軸上または実軸の下側の領域である。

したがって、点  $R(w)$  の軌跡は、右上の網点部の領域内にある放物線⑦、すなわち  $x = -y^2 + \frac{1}{4}$  の  $0 \leq \arg w \leq \frac{2}{3}\pi$  または  $-\frac{2}{3}\pi \leq \arg w \leq 0$  の部分である。

図示すると、右図の曲線 (実線部) となる。



[解説]

複素数と図形についての問題です。(2)は(1)の⑤⑥をもとに  $w$  の条件を求めています。なお、軌跡の限界を求める方法はいろいろ考えられますが、解答例では図形的に処理したため、 $\theta$  の範囲を⑧または⑨と、わかりやすくしています。

6

問題のページへ

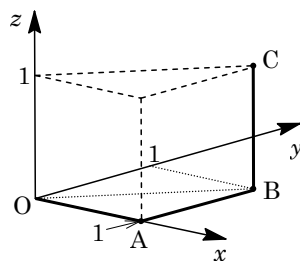
(1)  $\frac{1}{2} < r < 1$  のとき, 点 P が線分 OA, AB, BC 上を動くとき

きに点 P を中心とする半径  $r$  の球 (内部を含む) が通過する部分を, それぞれ  $V_1, V_2, V_3$  とすると,

$$V_1 : (x-a)^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \dots\dots\dots ①$$

$$V_2 : (x-1)^2 + (y-b)^2 + z^2 \leq r^2 \dots\dots\dots ②$$

$$V_3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-c)^2 \leq r^2 \dots\dots\dots ③$$



ただし,  $a, b, c$  は  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq 1$  の範囲を動くものとする。

さて, 平面  $y=t$  と  $V_1$  の共通部分は, ①と連立して,

$$(x-a)^2 + z^2 \leq r^2 - t^2 \dots\dots\dots ④$$

そして,  $y=t$  が  $V_1$  と共有点をもつ条件は,  $r^2 - t^2 \geq 0$  から,

$$(t+r)(t-r) \leq 0, -r \leq t \leq r \dots\dots\dots ⑤$$

また, 平面  $y=t$  と  $V_3$  の共通部分は, ③と連立して,

$$(x-1)^2 + (z-c)^2 \leq r^2 - (t-1)^2 \dots\dots\dots ⑥$$

そして,  $y=t$  が  $V_3$  と共有点をもつ条件は,  $r^2 - (t-1)^2 \geq 0$  から,

$$(t-1+r)(t-1-r) \leq 0, 1-r \leq t \leq 1+r \dots\dots\dots ⑦$$

すると,  $\frac{1}{2} < r < 1$  から  $1-r < r$  となり,  $y=t$  が  $V_1, V_3$  の双方と共有点をもつ条件は, ⑤⑦から,  $1-r \leq t \leq r$  である。

このとき, その共通部分を平面  $y=t$  上に図示すると,

(i)  $r^2 - t^2 \geq r^2 - (t-1)^2$  ( $1-r \leq t \leq \frac{1}{2}$ ) のとき

④⑥より,  $a, c$  を  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq c \leq 1$  の範囲で動かすと, その共通部分は右図の網点部となる。

ただし, 境界は領域に含む。

(ii)  $r^2 - t^2 \leq r^2 - (t-1)^2$  ( $\frac{1}{2} \leq t \leq r$ ) のとき

④⑥より,  $a, c$  を  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq c \leq 1$  の範囲で動かすと, その共通部分は右図の網点部となる。

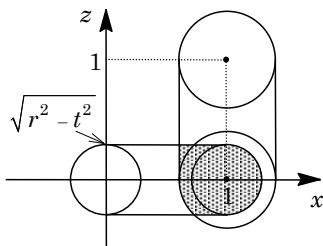
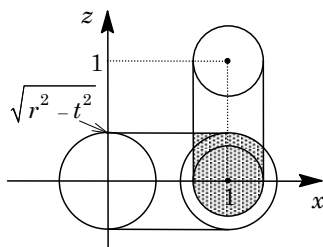
ただし, 境界は領域に含む。

(2) ②で  $b=t$  のとき, 平面  $y=t$  と  $V_2$  の共通部分は,

$$(x-1)^2 + z^2 \leq r^2 \dots\dots\dots ⑧$$

さて,  $V_1$  と  $V_3$  の共通部分が  $V_2$  に含まれる条件は, (1)の(i)(ii)のいずれの場合も点  $(x, z) = (1 - \sqrt{r^2 - (t-1)^2}, \sqrt{r^2 - t^2})$  が⑧を満たすことより,

$$\{1 - \sqrt{r^2 - (t-1)^2} - 1\}^2 + (\sqrt{r^2 - t^2})^2 \leq r^2, r^2 - (t-1)^2 + r^2 - t^2 \leq r^2$$



$$r^2 \leq (t-1)^2 + t^2 = 2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

すると、 $\frac{1}{2} < r < 1$  のとき、 $\textcircled{9}$  が  $1-r \leq t \leq r$  を満たす任意の  $t$  で成立することより、 $r^2 \leq \frac{1}{2}$  から  $r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  となり、求める条件は  $\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  である。

- (3) まず、 $V_1$  の体積を  $S$  とすると、 $V_2, V_3$  の体積もそれぞれ  $S$  となる。また、 $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積を  $T$  とすると、 $V_2$  と  $V_3$  の共通部分の体積も  $T$  となる。

さらに、 $V_1$  と  $V_3$  の共通部分は  $V_2$  に含まれることより、 $V_1, V_2, V_3$  を合わせて得られる立体  $V$  の体積  $W$  は、 $W = 3S - 2T$  と表せる。

- (4)  $V_1$  は、半径が  $r$  で高さが 1 の円柱に、半径が  $r$  の半球を 2 つ合わせたものより、その体積  $S$  は、

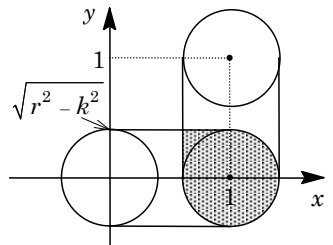
$$S = \pi r^2 \cdot 1 + \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi \left( \frac{4}{3} r^3 + r^2 \right)$$

次に、 $V_1$  と  $V_2$  を、平面  $z = k$  ( $-r \leq k \leq r$ ) で切った断面は、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  から、

$$(x-a)^2 + y^2 \leq r^2 - k^2$$

$$(x-1)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 - k^2$$

ここで、 $a, b$  を  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$  の範囲で動かすと、 $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の断面は右図の網点部となる。



すなわち、半径が  $\sqrt{r^2 - k^2}$  の四分円 3 つに、1 辺が  $\sqrt{r^2 - k^2}$  の正方形を合わせたものより、その面積は、

$$\frac{3}{4} \pi (\sqrt{r^2 - k^2})^2 + (\sqrt{r^2 - k^2})^2 = \left( \frac{3}{4} \pi + 1 \right) (r^2 - k^2)$$

すると、 $V_1$  と  $V_2$  の共通部分の体積  $T$  は、 $xy$  平面に関する対称性から、

$$T = 2 \int_0^r \left( \frac{3}{4} \pi + 1 \right) (r^2 - k^2) dk = \left( \frac{3}{2} \pi + 2 \right) \left[ r^2 k - \frac{k^3}{3} \right]_0^r = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \pi + 2 \right) r^3$$

以上より、 $V_1, V_2, V_3$  を合わせて得られる立体  $V$  の体積  $W$  は、(3) から、

$$W = 3 \cdot \pi \left( \frac{4}{3} r^3 + r^2 \right) - 2 \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \pi + 2 \right) r^3 = \left( 2\pi - \frac{8}{3} \right) r^3 + 3\pi r^2$$

**[解説]**

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。誘導は細かく付けられているものの、かなりハードです。なお、上の解答例は代数的な記述を前面に出したものです。