1

解答解説のページへ

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり, 3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値, 最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標空間内に 5 点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(-2,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ -2,\ 0)$, $E(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする。さらに，p は $2 < p < 4$ を満たす実数とし，点 $P(p,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y = 0$ による切り口，および平面 α の平面 $y = 0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

(3) 実数 p が(2)で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

n を 1 以上の整数とする。

(1)　n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2)　$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　n を 1 以上の整数とする。x についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2)　(1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3)　(1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n\text{，}\ b=\lim_{n\to\infty} {a_n}^n\text{，}\ c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

6

解答解説のページへ

複素数α，β，γ，δおよび実数a, bが，次の3条件を満たしながら動く。

条件1：α，β，γ，δは相異なる。

条件2：α，β，γ，δは4次方程式$z^4-2z^3-2az+b=0$の解である。

条件3：複素数$\alpha\beta+\gamma\delta$の実部は0であり，虚部は0でない。

(1) α，β，γ，δのうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) bをaで表せ。

(3) 複素数$\alpha+\beta$がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

1

問題のページへ

$I=\int_0^1\Big(x^2+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big)\Big(1+\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\Big)dx$ とおくと，

$$I=\int_0^1\Big\{x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\Big\}dx$$

ここで，$I_1=\int_0^1 x^2dx=\Big[\dfrac{x^3}{3}\Big]_0^1=\dfrac{1}{3}$，$I_2=\int_0^1\Big\{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\Big\}dx$，

$I_3=\int_0^1\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ とする。

まず，$t=\sqrt{1+x^2}$ とおくと，$t^2=1+x^2$ となり，$tdt=xdx$ から，

$$I_2=\int_1^{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{t}+\frac{t^2-1}{t^3}\Big)tdt=\int_1^{\sqrt{2}}\Big(1+1-\frac{1}{t^2}\Big)dt=\Big[2t+\frac{1}{t}\Big]_1^{\sqrt{2}}$$

$$=2\sqrt{2}-2+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{5}{2}\sqrt{2}-3$$

また，$x=\tan\theta\Big(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cdot\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

すると，$I=I_1+I_2+I_3$ から，

$$I=\frac{1}{3}+\Big(\frac{5}{2}\sqrt{2}-3\Big)+\Big(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\Big)=\frac{\pi}{8}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{35}{12}$$

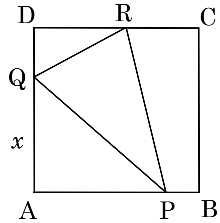
［解 説］

定積分の計算だけという予想外の問題です。一瞬，フリーズした受験生もいるのではないかと思いますが。

© 電送数学舎 2019

2

問題のページへ



1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，$\mathrm{AQ}=x\ (0<x\leqq 1)$ とおくと，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}$ から $\dfrac{1}{2}x\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\mathrm{AP}=\frac{2}{3x}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{3}$ から，四角形 APRQ の面積が $\dfrac{2}{3}$ となるので，$\mathrm{DQ}=1-x$ に注意して①を用いると，

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{DR}+\frac{2}{3x}\right)\cdot 1-\frac{1}{2}(1-x)\cdot\mathrm{DR}=\frac{2}{3}$$

すると，$\mathrm{DR}+\dfrac{2}{3x}-(1-x)\cdot\mathrm{DR}=\dfrac{4}{3}$ となり，$\dfrac{2}{3x}+x\cdot\mathrm{DR}=\dfrac{4}{3}$ から，

$$\mathrm{DR}=\frac{4}{3x}-\frac{2}{3x^2}=\frac{4x-2}{3x^2}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$0<\mathrm{AP}\leqq 1$，$0\leqq\mathrm{DR}\leqq 1$ なので，①②より，

$$0<\frac{2}{3x}\leqq 1\cdots\cdots\cdots③,\quad 0\leqq\frac{4x-2}{3x^2}\leqq 1\cdots\cdots\cdots④$$

$0<x\leqq 1$ に注意すると，③から $x\geqq\dfrac{2}{3}$ となり，④から $x\geqq\dfrac{1}{2}$ かつ $3x^2-4x+2\geqq 0$ となるが，$3x^2-4x+2\geqq 0$ はつねに成り立つので，$x\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

以上まとめると，$\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$ であり，このとき②から，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4x-2}{3x^3}$ となる。

そこで，$f(x)=\dfrac{4x-2}{3x^3}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{4x^3-(4x-2)\cdot 3x^2}{3x^6}=\frac{-8x+6}{3x^4}$$

これより，$\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ すなわち $\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値は $\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$ である。

x	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{2}{3}$

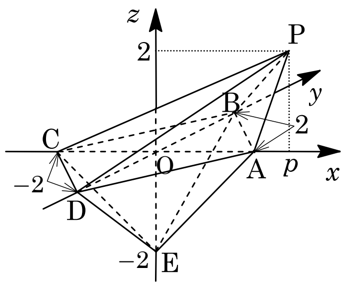
［解 説］

図形量の最大・最小に関する標準的な問題です。最初に行う変数設定に応じて，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ を表す式は変わります。上の解答例では，オーソドックスに $\mathrm{AQ}=x$ としています。なお，文系でも同じ問題が出されていますが，上記のような分数関数が現れないように配慮した誘導がついています。

© 電送数学舎 2019

3

問題のページへ

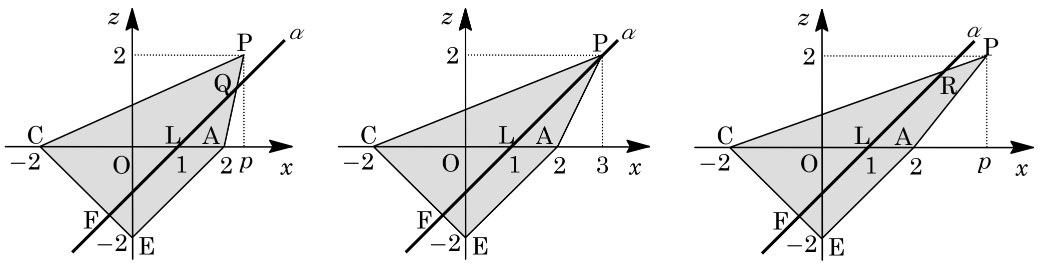


(1)　まず, 6 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(-2,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -2,\ 0)$，E$(0,\ 0,\ -2)$，P$(p,\ 0,\ 2)$ を頂点とする八面体 PABCDE に対して，平面 $y=0$ による切り口は四角形 PCEA となる。ただし $2<p<4$ である。

また，線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面 α に対して，平面 $y=0$ による切り口は，線分 MN と x 軸との交点 L$(1,\ 0,\ 0)$ を通り AE に平行な直線として表せる。

これより，平面 $y=0$ 上で，八面体 PABCDE と平面 α の切り口は，p の値で場合分けすると，下図のようになる。

$2<p<3$ のとき　　$p=3$ のとき　　$3<p<4$ のとき

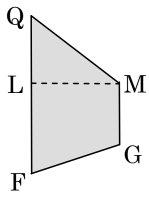


(2)　八面体 PABCDE と平面 α は xz 平面に関して対称なので，以下，$y \geqq 0$ で考える。

さて，$z \leqq 0$ では，八面体 PABCDE の平面 α による切り口は，平面 α と辺 CE, 辺 BE との交点をそれぞれ F, G とおくと，つねに台形 LMGF である。

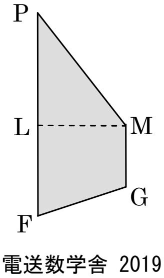
次に，p の値で場合分けをして，$z \geqq 0$ での切り口の形を考える。そして，この切り口と，$z \leqq 0$ の台形 LMGF とを合わせ，さらに xz 平面に関して対称移動して，八面体 PABCDE の平面 α による切り口を調べる。

(i)　$2<p<3$ のとき



$z \geqq 0$ での八面体 PABCDE の平面 α による切り口は，平面 α と辺 PA との交点を Q とおくと，三角形 QLM である。これより，$y \geqq 0$ での切り口は右図のようになり，$y \leqq 0$ のときの切り口を考え合わせると，その形は六角形である。

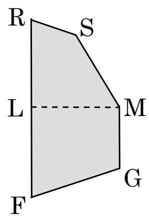
(ii)　$p=3$ のとき



$z \geqq 0$ での八面体 PABCDE の平面 α による切り口は，三角形 PLM である。これより，$y \geqq 0$ での切り口は右図のようになり，$y \leqq 0$ のときの切り口を考え合わせると，その形は六角形である。

© 電送数学舎 2019

(iii) $3<p<4$ のとき



$z \geqq 0$ での八面体 PABCDE の平面αによる切り口は，平面αと辺PC，辺PBとの交点をそれぞれR，Sとおくと，四角形LMSRである。これより，$y \geqq 0$ での切り口は右図のようになり，$y \leqq 0$ のときの切り口を考え合わせると，その形は八角形である。

(i)～(iii)より，切り口が八角形となるのは，$3<p<4$ のときである。

(3)　まず，平面αは xz 平面での切り口が直線$z=x-1$で，しかも y 軸に平行であることより，その方程式は，

$$z=x-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

次に，直線PCは，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(p+2,\ 0,\ 2)$ から，t をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=(-2,\ 0,\ 0)+t(p+2,\ 0,\ 2) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，直線PBは，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(p,\ -2,\ 2)$ から，s をパラメータとして，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 0)+s(p,\ -2,\ 2) \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，ここで，$3<p<4$ のとき，点Rと点Sの座標を求める。

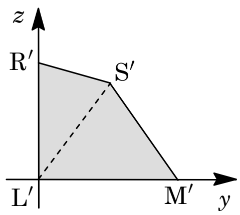
①②より，$2t=-2+t(p+2)-1$ となり，$pt=3\left(t=\frac{3}{p}\right)$から，点Rの座標は，

$$x=-2+\frac{3}{p}(p+2)=\frac{p+6}{p},\ y=0,\ z=\frac{6}{p}$$

①③より，$2s=sp-1$ となり，$(p-2)s=1\left(s=\frac{1}{p-2}\right)$から，点Sの座標は，

$$x=\frac{p}{p-2},\ y=2+\frac{-2}{p-2}=\frac{2p-6}{p-2},\ z=\frac{2}{p-2}$$

そこで，八面体PABCDEの平面αによる切り口の$y \geqq 0$，$z \geqq 0$の部分は四角形LMSRであり，これを yz 平面に正射影した四角形$\mathrm{L'M'S'R'}$について，その頂点は，$x=0$上で，



$$\mathrm{L}'(0,\ 0),\ \mathrm{M}'(1,\ 0),\ \mathrm{S}'\left(\frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right),\ \mathrm{R}'\left(0,\ \frac{6}{p}\right)$$

これより，四角形$\mathrm{L'M'S'R'}$面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{p-2}=\frac{6p-18}{p(p-2)}+\frac{1}{p-2}=\frac{7p-18}{p(p-2)}$$

［解　説］

立体の絡んだ計量問題で頻出のタイプです。(2)までは直感的に処理をし，(3)ではそれを計算で補強するというスタイルで解答例を作っています。ただ，記述量はかなり多めです。

© 電送数学舎 2019

4　　　　問題のページへ

(1)　n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n とおき，k と l を互いに素な整数として，

$$n^2+1=d_nk \cdots\cdots\text{①},\ \ 5n^2+9=d_nl \cdots\cdots\text{②}$$

①②から，$d_n(l-5k)=4$ となり，d_n は 4 の約数，すなわち 1，2，4 のいずれかとなる。そこで，n を偶奇に分けて調べる。

(i)　n が偶数のとき

n^2+1 と $5n^2+9$ はともに奇数なので，$d_n=1$ である。

(ii)　n が奇数のとき

$\mathrm{mod}\,4$ で記すと，$n^2+1\equiv 1+1\equiv 2$，$5n^2+9\equiv 1\cdot 1+1\equiv 2$ となり，ともに 4 で割ると 2 余る整数，すなわち 4 の倍数でない偶数なので，$d_n=2$ である。

(2)　$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗，すなわち平方数になると仮定する。

(i)　n が偶数のとき

(1)から n^2+1 と $5n^2+9$ は互いに素なので，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が平方数となる条件は，n^2+1 と $5n^2+9$ がともに平方数の場合のみである。

ところが，$n^2<n^2+1<(n+1)^2$ であるので，n^2+1 は平方数でない。すなわち，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とならない。

(ii)　n が奇数のとき

(1)から n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数は 2 であるので，k と l を互いに素として，

$$n^2+1=2k \cdots\cdots\text{③},\ \ 5n^2+9=2l \cdots\cdots\text{④}$$

ただし，(1)から n^2+1 と $5n^2+9$ は，ともに 4 の倍数でない偶数なので，k と l はともに奇数である。

ここで，③④より，$(n^2+1)(5n^2+9)=2^2kl$ となり，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が平方数となる条件は，k と l がともに奇数の平方数の場合のみである。

これより，p, q を整数として，$k=(2p-1)^2$，$l=(2q-1)^2$ とおくと，③④から，

$$n^2+1=2(2p-1)^2 \cdots\cdots\text{⑤},\ \ 5n^2+9=2(2q-1)^2 \cdots\cdots\text{⑥}$$

⑤⑥より，$2(2q-1)^2-10(2p-1)^2=4$，$(2q-1)^2-5(2p-1)^2=2$ となり，

$$4(q^2-q-5p^2+5p)=2-1+5,\ \ 2(q^2-q-5p^2+5p)=3 \cdots\cdots\text{⑦}$$

すると，⑦は左辺が偶数，右辺が奇数となり，成立しない。

よって，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は平方数とならない。

(i)(ii)より，どんな自然数 n に対しても，$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならない。

［解　説］

誘導つきの整数問題で，n の消去という方針で式変形の後，押さえ込むスタイルの解答例です。なお，最初に実験を行っています。解答例では省略しましたが……。

© 電送数学舎 2019

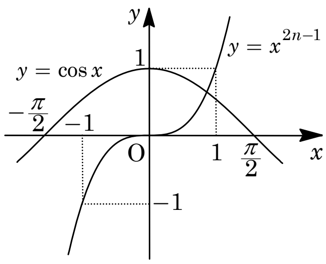
$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　n を自然数とする方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ ……①に対し，

$$y=x^{2n-1}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\cos x\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①の実数解は，曲線②と③の共有点の x 座標が対応する。



(i)　$x<-1$ のとき　$x^{2n-1}<-1\leqq\cos x$

(ii)　$-1\leqq x<0$ のとき　$x^{2n-1}<0<\cos x$

(iii)　$x>1$ のとき　$x^{2n-1}>1\geqq\cos x$

(i)〜(iii)より，$x<0$，$1<x$ では，曲線②と③は共有点をもたない。

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)=x^{2n-1}-\cos x$ とおくと，

$$f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}+\sin x$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$1-\cos 1>0$ から，$f(x)=0$ は $0<x<1$ においてただ 1 つの実数解をもつ。

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$1-\cos 1$

よって，方程式①は，ただ 1 つの実数解を $0<x<1$ にもつ。

(2)　①の実数解を a_n とすると，(1)より $0<a_n<1$ なので，$\cos a_n>\cos 1$ である。

(3)　①より，$a_n{}^{2n-1}=\cos a_n$ ……④となり，$(2n-1)\log a_n=\log(\cos a_n)$ から，

$$\log a_n=\frac{\log(\cos a_n)}{2n-1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，(2)から $\cos 1<\cos a_n<1$ なので，$\dfrac{\log(\cos 1)}{2n-1}<\dfrac{\log(\cos a_n)}{2n-1}<\dfrac{\log 1}{2n-1}=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos 1)}{2n-1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos a_n)}{2n-1}=0$ となり，⑤から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=0$

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log a_n}=e^0=1$$

次に，④より $a_n{}^{2n}=a_n\cos a_n$ となり，$a_n{}^n=\sqrt{a_n\cos a_n}$ ……⑥から，

$$b=\lim_{n\to\infty}a_n{}^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n\cos a_n}=\sqrt{a\cos a}=\sqrt{\cos 1}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$g(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおくと，$g'(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$

⑥から $a_n{}^n=g(a_n)$，⑦から $b=g(1)$ となり，$n\to\infty$ のとき $a_n\to 1$ なので，

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^n-b}{a_n-a}=\lim_{a_n\to 1}\frac{g(a_n)-g(1)}{a_n-1}=g'(1)=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

［解　説］

微分の応用と極限の融合題です。(1)(2)は図の説明です。(3)が a，b だけであれば他の方法も考えられるものの，c の式を微分係数の定義式と対比させるとすると……。

© 電送数学舎 2019

$\boxed{6}$　問題のページへ

(1)　条件 1, 2 より，相異なる複素数α，β，γ，δは，実数係数の 4 次方程式

$$z^4-2z^3-2az+b=0\cdots\cdots\cdots①$$

の解なので，この 4 つの複素数に関して，次の 3 つの場合が考えられる。

(a)　4 つとも実数

(b)　2 つが実数，残りの 2 つが互いに共役な複素数

(c)　2 つが互いに共役な複素数，残りの 2 つも互いに共役な複素数

ここで，さらに複素数$\alpha\beta+\gamma\delta$の実部は 0 であり，虚部は 0 でないという条件 3 を考え合わせる。

まず，(a)の場合については，$\alpha\beta+\gamma\delta$が実数になるので，条件 3 に反する。

また，(c)の場合については，γとδの対称性から，

(c-i)　$\beta=\overline{\alpha}$のとき　$\delta=\overline{\gamma}$から，$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\overline{\alpha}+\gamma\overline{\gamma}=|\alpha|^2+|\gamma|^2$は実数。

(c-ii)　$\gamma=\overline{\alpha}$のとき　$\delta=\overline{\beta}$から，$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\alpha}\overline{\beta}=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}$は実数。

(c-i), (c-ii)より，(c)の場合については，どちらも条件 3 に反する。

以上より，(b)の場合である「α，β，γ，δは，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数である」ということになる。

(2)　γとδの対称性から，2 つが実数がαとβ，αとγという 2 つの場合を考える。

(b-i)　α，βが実数，$\delta=\overline{\gamma}$のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\gamma\overline{\gamma}=\alpha\beta+|\gamma|^2$は実数となり，条件 3 に反する。

(b-ii)　α，γが実数，$\delta=\overline{\beta}$のとき

$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\gamma\overline{\beta}$となり，$\overline{\alpha\beta+\gamma\overline{\beta}}=\alpha\overline{\beta}+\gamma\beta$に注意すると，条件 3 から，

$$(\alpha\beta+\gamma\overline{\beta})+(\alpha\overline{\beta}+\gamma\beta)=0\cdots\cdots\cdots②,\quad (\alpha\beta+\gamma\overline{\beta})-(\alpha\overline{\beta}+\gamma\beta)\neq0\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\alpha(\beta+\overline{\beta})+\gamma(\beta+\overline{\beta})=0$となり，$(\alpha+\gamma)(\beta+\overline{\beta})=0\cdots\cdots\cdots④$

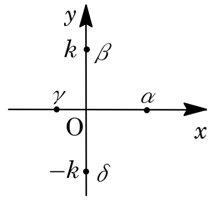
③より，$\alpha(\beta-\overline{\beta})-\gamma(\beta-\overline{\beta})\neq0$となり，$(\alpha-\gamma)(\beta-\overline{\beta})\neq0$から，$\alpha\neq\gamma$より，

$$\beta\neq\overline{\beta}\cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，④⑤より，$\alpha+\gamma$の値で場合分けをする。

(b-ii-i)　$\alpha+\gamma\neq0$のとき

④より$\beta+\overline{\beta}=0$で，⑤より$\beta\neq\overline{\beta}$なので，$\beta$は純虚数となることより$\beta=ki\ (k\neq0)$と表せ，これより，解が$\alpha$，$\gamma$，$\pm ki$となる 4 次の係数が 1 の 4 次方程式は，



$$(z-\alpha)(z-ki)(z-\gamma)(z+ki)=0$$

$$\{z^2-(\alpha+\gamma)z+\alpha\gamma\}(z^2+k^2)=0$$

$$z^4-(\alpha+\gamma)z^3+(\alpha\gamma+k^2)z^2-k^2(\alpha+\gamma)z+k^2\alpha\gamma=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

© 電送数学舎 2019

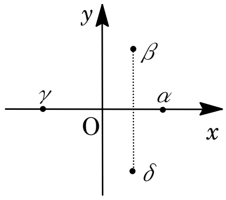
ここで，①⑥の係数を比較して，

$$\alpha+\gamma=2,\ \alpha\gamma+k^2=0,\ k^2(\alpha+\gamma)=2a,\ k^2\alpha\gamma=b$$

まとめると，$\alpha\gamma=-k^2$，$a=k^2$ となり，$b=-k^4=-a^2$ である。

(b-ii-ii)　$\alpha+\gamma=0$ のとき

④は成立し $\gamma=-\alpha$，⑤より $\beta\neq\overline{\beta}$ なので β は虚数であり，これより，解が α，$-\alpha$，β，$\overline{\beta}$ となる4次の係数が1の4次方程式は，



$$(z-\alpha)(z-\beta)(z+\alpha)(z-\overline{\beta})=0$$

$$(z^2-\alpha^2)\{z^2-(\beta+\overline{\beta})z+\beta\overline{\beta}\}=0$$

$$z^4-(\beta+\overline{\beta})z^3+(-\alpha^2+\beta\overline{\beta})z^2+\alpha^2(\beta+\overline{\beta})z-\alpha^2\beta\overline{\beta}=0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

ここで，①⑦の係数を比較して，

$$\beta+\overline{\beta}=2,\ -\alpha^2+\beta\overline{\beta}=0,\ \alpha^2(\beta+\overline{\beta})=-2a,\ -\alpha^2\beta\overline{\beta}=b$$

まとめると，$\beta\overline{\beta}=\alpha^2$，$a=-\alpha^2$ となり，$b=-\alpha^4=-a^2$ である。

(b-i), (b-ii)より，b を a で表すと，$b=-a^2$ である。

(3)　(2)から，α，γ が実数，$\delta=\overline{\beta}$ のもとで，$\alpha+\beta=x+yi$ とおく。

(i)　$\alpha+\gamma\neq0$ のとき

$x+yi=\alpha+ki$ より，$x=\alpha$，$y=k\ (k\neq0)$

(2)から，$\alpha+\gamma=2$，$\alpha\gamma+k^2=0$ なので $\alpha(2-\alpha)+k^2=0$ となり，

$$x(2-x)+y^2=0,\ x^2-2x-y^2=0$$

よって，$(x-1)^2-y^2=1\ (y\neq0)$

(ii)　$\alpha+\gamma=0$ のとき

$\alpha\neq0$ で，$\beta=p+qi\ (q\neq0)$ とおくと，$x+yi=(\alpha+p)+qi$ より，

$$x=\alpha+p,\ y=q\ (\alpha\neq0,\ q\neq0)$$

(2)から，$\beta+\overline{\beta}=2$，$-\alpha^2+\beta\overline{\beta}=0$ なので，

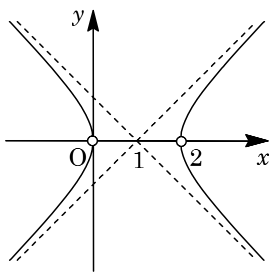
$$2p=2,\ -\alpha^2+p^2+q^2=0$$

まとめると，$p=1$，$\alpha^2-q^2=1$

すると，$x=\alpha+1$ から，$(x-1)^2-y^2=1\ (x\neq1,\ y\neq0)$

(i)(ii)より，$\alpha+\beta$ はどちらの場合も右図の双曲線を描く。

ただし，2つの白丸は除く。



［解　説］

高次方程式と複素数平面についての総合的な問題です。文字がたくさん現れますので，その処理能力が問われます。さらに，途中で場合分けも現れ，そのため量的にはかなり多めで，体力の消耗は激しいものとなります。

© 電送数学舎 2019