$\boxed{1}$

解答例のページへ

a を正の実数とする。座標平面において，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を l とおく。l と C の交点のうち，P と異なる点を Q とおく。

(1)　Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し，Q を通る直線を m とおく。m と C の交点のうち，Q と異なる点を R とおく。

(2)　a がすべての正の実数を動くとき，R の x 座標の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

平面上で $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し, A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする。ただし，この問いでは，三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，s と t を求めよ。

(3)　$0<\theta<\pi$ を満たす θ に対して，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ のとき，s と t を θ を用いて表せ。

3

解答例のページへ

白玉 2 個が横に並んでいる。投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを用いて，次の手順(＊)をくり返し，白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順(＊)　コインを投げ，表がでたら白玉，裏がでたら黒玉を，それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして，新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり，かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには，新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば，手順(＊)を 2 回行いコインが裏，表の順にでた場合には，白玉が 4 つ並ぶ。

正の整数 n に対して，手順(＊)を n 回行った時点での$(n+2)$個の玉の並び方を考える。

(1)　$n=3$ のとき，右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(2)　n を正の整数とする。右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(3)　n を正の整数とする。右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

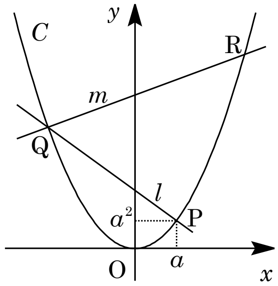
a を実数とする。座標平面において，次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする。

$$y \leqq -\frac{1}{2}x^2 + 2,\quad y \geqq |x^2 + a|,\quad -1 \leqq x \leqq 1$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$a>0$ のとき，$C: y=x^2$ ……①上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における法線 l の方程式は，$y'=2x$ から

$$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x^2-a^2=-\dfrac{1}{2a}(x-a)$ となり，$x\neq a$ のとき，

$$x+a=-\frac{1}{2a},\quad x=-a-\frac{1}{2a}$$

これより，点 Q の x 座標は $x=-a-\dfrac{1}{2a}$ である。

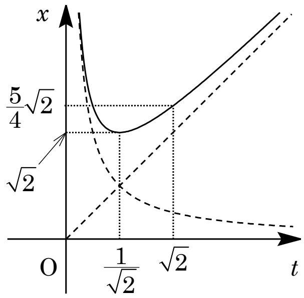
(2)　点 Q における法線 m と C の交点のうち Q と異なる点 R の x 座標は，(1)から，

$$x=-\left(-a-\frac{1}{2a}\right)-\frac{1}{2\left(-a-\frac{1}{2a}\right)}=\left(a+\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2\left(a+\frac{1}{2a}\right)}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$t=a+\dfrac{1}{2a}$ とおき，$a>0$ から相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$t=a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{2a}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

等号は $a=\dfrac{1}{2a}$，すなわち $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成立する。



③から $x=t+\dfrac{1}{2t}\ (t\geqq\sqrt{2})$ となり，$f(t)=t+\dfrac{1}{2t}$ とおくと，$\sqrt{2}\leqq t_1<t_2$ のとき，

$$\begin{aligned}f(t_2)-f(t_1)&=(t_2-t_1)+\left(\frac{1}{2t_2}-\frac{1}{2t_1}\right)\\&=(t_2-t_1)\left(1-\frac{1}{2t_1t_2}\right)\\&=\frac{(t_2-t_1)(2t_1t_2-1)}{2t_1t_2}>0\end{aligned}$$

これより，$f(t_1)<f(t_2)$ となり，$f(t)$ は $t\geqq\sqrt{2}$ で単調に増加する。

したがって，点 R の x 座標の最小値は，$f(\sqrt{2})=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$ である。

［コメント］

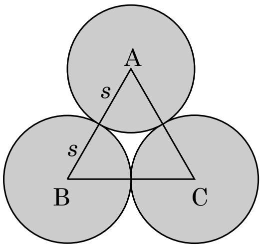
放物線の法線を題材にした問題です。(2)の後半は，$f'(t)$ を計算して増減表に持ち込むのが普通ですが，範囲外になるために定義によって単調増加の説明をしています。なお，参考に $x=t$ と $x=\dfrac{1}{2t}$ を組み合わせたグラフも掲載しました。

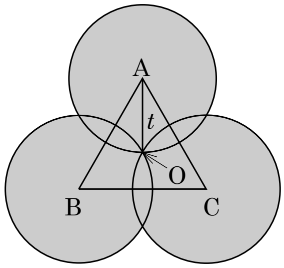
2

問題のページへ

$AB=AC=1$ である△ABC に対して，A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域 D_r とし，辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s，△ABC が D_r に含まれるような最小の r を t とする。

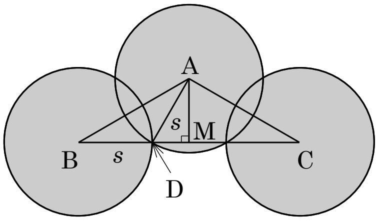
(1)　$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，△ABC は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。このとき，s は 3 つの円が各辺の中点を通るときの半径から $s=\dfrac{1}{2}$ となる。





また，t は 3 つの円が△ABC の外心 O を通るときの半径から，$t=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

(2)　$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$BC=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$ である。このとき，s は 3 つの円が右図のように配置するときの半径になる。すると，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$ から



$AM=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$， $\angle ADM=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ であり，

$s=\dfrac{AM}{\sin\angle ADM}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

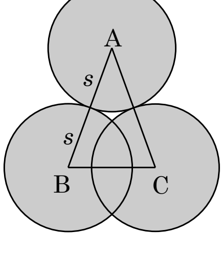
また，△ABC の外心 O は三角形の外部にあり，右上図の配置のときに△ABC は D_r に含まれるので $t=s$ となり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

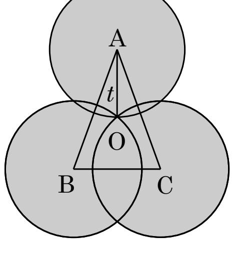
(3)　$\angle BAC=\theta\ (0<\theta<\pi)$ のとき，$BC=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ である。

ここで，BC と $AB=AC=1$ の大小関係，および△ABC の外心 O の位置に着目して場合分けを行う。

(i)　$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$BC\leqq1$ となり，外心 O は三角形の内部にある。

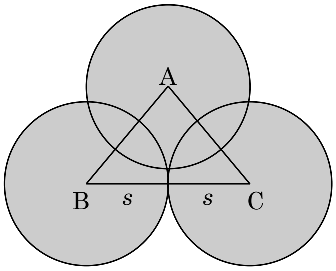


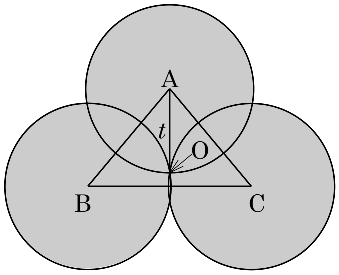


このとき，s は 3 つの円が辺 AB, AC の中点を通るときの半径から $s=\dfrac{1}{2}$，t は 3 つの円が△ABC の外心 O を通るときの半径から，$t=\dfrac{BC}{2\sin\theta}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$ となる。

(ii) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$1<\mathrm{BC}<\sqrt{2}$ となり，外心 O は三角形の内部にある。

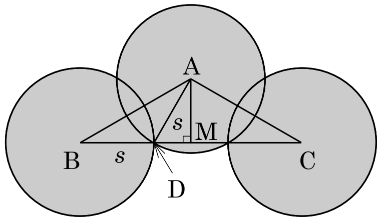




このとき，s は 2 つの円が辺 BC の中点を通るときの半径から $s=\sin\dfrac{\theta}{2}$，t は 3 つの円が△ABC の外心 O を通るときの半径から，$t=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$ となる。

(iii) $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$ のとき

$\mathrm{BC}\geqq\sqrt{2}$ となり，外心 O は三角形の外部にある。



このとき，s は 3 つの円が右図のように配置するときの半径になる。すると，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ から

$\mathrm{AM}=\sin\dfrac{\pi-\theta}{2}=\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\angle\mathrm{ADM}=2\cdot\dfrac{\pi-\theta}{2}=\pi-\theta$

となり，$s=\dfrac{\mathrm{AM}}{\sin\angle\mathrm{ADM}}=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ である。

また，△ABC の外心 O は三角形の外部にあり，右上図の配置のときに△ABC は D_r に含まれるので $t=s$ となり，$t=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ である。

［コメント］

やや面倒な平面図形の問題です。(3)の流れとしては，(1)と(2)を参考にして，まず三角形の等辺と底辺の長さの関係から s を，次に三角形の外心の位置から t を求めています。

3

問題のページへ

(1)　○○から与えられた手順(∗)を行うと，○○○と○○●が確率$\dfrac{1}{2}$ずつで，次に，

○○○○，○○○●，○○●○→○○○○，○○●●

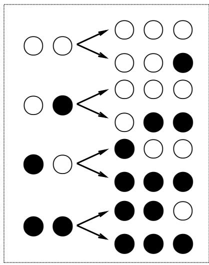
すると，4 つの玉について，○○○○，○○○●，○○●●の確率は，順に$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}$となる。さらに，もう 1 つ玉を並べると，

○○○○○，○○○○●，○○○●○→○○○○○，○○○●●

○○●●○，○○●●●

これより，手順(∗)を 3 回行い 5 つの玉を並べるとき，右から 2 番目の玉が白玉である確率は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$となる。

(2)　手順(∗)を n 回行ったとき，右端の 2 つの玉が○○，○●，●○，●●である確率を，それぞれa_n，b_n，c_n，d_nとおく。



すると，右の状態の推移図から，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}d_n\cdots\cdots③,\quad d_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}d_n\cdots\cdots④$$

なお，$a_0=1$，$b_0=c_0=d_0=0$としても一般性を失わない。

さて，右から 2 番目の玉が白玉である確率はa_n+b_nなので，まず①②より，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$に注意して，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}(1-a_n-b_n-d_n)$$

$$=\frac{1}{2}(a_n-d_n)+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

①④より，$a_{n+1}-d_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-d_n)$から$a_n-d_n=(a_0-d_0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots⑥$

⑥を⑤に代入すると，$a_{n+1}+b_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots⑦$となり，$n\geqq 1$において，

$$a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}$$

(3)　右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率はa_nなので，②を⑦に代入して，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{1}{2}$から，

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，α，βを定数として，⑧を満たす数列の 1 つを$a_n=\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\beta$とすると，

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\beta=-\frac{1}{2}\left\{\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+\beta\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}$$

すると，$\alpha=-\alpha+1$ かつ $\beta=-\dfrac{1}{2}\beta+\dfrac{1}{2}$，すなわち $\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧⑨より，$a_{n+1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}\left\{a_n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{3}\right\}$ となり，

$$a_n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}=\left\{a_0-\left(\frac{1}{2}\right)^{1}-\frac{1}{3}\right\}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

これより，$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\dfrac{1}{3}$ である。

［コメント］

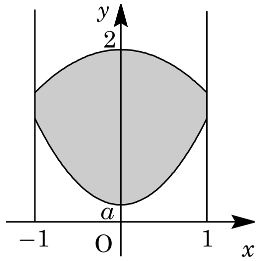
確率と漸化式の融合問題で。与えられた手順が把握できれば，立式は難しくありません。漸化式のまとめ方はいろいろありますが，上の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

$-2 \leqq a < 2$ のとき，領域 $D: y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+2$，$y \geqq |x^2+a|$，$-1 \leqq x \leqq 1$ に対して，

(i)　$0 \leqq a < 2$ のとき

$x^2+a \geqq 0$ より，$y \geqq |x^2+a|$ は $y \geqq x^2+a$ となり，領域 D は右図の網点部である。



この面積を $S(a)$ とすると，$S(a)$ は a の増加にともなって明らかに減少するので，この区間の最大値は $S(0)$ である。

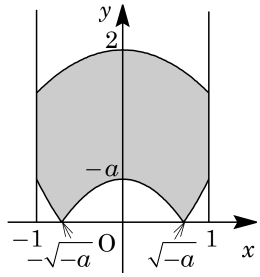
(ii)　$-2 \leqq a < 0$ のとき

$x \leqq -\sqrt{-a}$，$\sqrt{-a} \leqq x$ のとき $x^2+a \geqq 0$，$-\sqrt{-a} < x < \sqrt{-a}$ のとき $x^2+a<0$ であるので，$y \geqq |x^2+a|$ は，

$$y \geqq x^2+a \ (x \leqq -\sqrt{-a},\ \sqrt{-a} \leqq x),\quad y \geqq -x^2-a \ (-\sqrt{-a} < x < \sqrt{-a})$$

(ii-i)　$-1 < -\sqrt{-a} < \sqrt{-a} < 1 \ (-1 < a < 0)$ のとき

このとき，領域 D は右図の網点部である。



この面積を $S(a)$ とすると，y 軸対称に注意して，

$$\begin{aligned}
S(a) &= 2\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx - \int_{-\sqrt{-a}}^{\sqrt{-a}} (-x^2-a)\,dx \\
&\quad -2\int_{\sqrt{-a}}^1 (x^2+a)\,dx \\
&= \int_0^1 (-x^2+4)\,dx + \int_{-\sqrt{-a}}^{\sqrt{-a}} (x^2+a)\,dx - \int_{\sqrt{-a}}^1 (2x^2+2a)\,dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1 - \frac{1}{6}(2\sqrt{-a})^3 - \left[\frac{2}{3}x^3+2ax\right]_{\sqrt{-a}}^1 \\
&= -\frac{1}{3}+4+\frac{4}{3}a\sqrt{-a} - \frac{2}{3}(1+a\sqrt{-a}) - 2a(1-\sqrt{-a}) \\
&= \frac{11}{3}+\frac{4}{3}a\sqrt{-a}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}a\sqrt{-a}-2a+2a\sqrt{-a} \\
&= \frac{8}{3}a\sqrt{-a}-2a+3
\end{aligned}$$

ここで，$t=\sqrt{-a}$ とおき，$f(t) = -\dfrac{8}{3}t^3+2t^2+3$ とすると，$S(a)=f(t)$ となり，

$$f'(t) = -8t^2+4t = -4t(2t-1)$$

$-1 < a < 0$ のとき $0 < t < 1$ であり，この区間における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

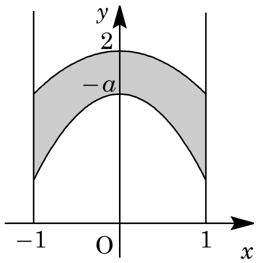
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$	$\frac{7}{3}$

これより，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{2}\left(a=-\dfrac{1}{4}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{19}{6}$ をとる。

(ii-ii)　$-\sqrt{-a} \leqq -1 < 1 \leqq \sqrt{-a}$ $(-2 \leqq a \leqq -1)$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，$y \geqq |x^2 + a|$ は $y \geqq -x^2 - a$ となり，

領域 D は右図の網点部である。



この面積を $S(a)$ とすると，$S(a)$ は $-a$ の減少，すなわち a の増加にともなって明らかに増加するので，この区間の最大値は $S(-1)$ である。

(i)(ii)より，$S(a)$ は $a = -1$，$a = 0$ において連続であることに留意し，

$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき単調増加，$0 \leqq a < 2$ のとき単調減少

したがって，$-2 \leqq a < 2$ における $S(a)$ の最大値は，$a = -\dfrac{1}{4}$ のとき $\dfrac{19}{6}$ である。

［コメント］

定積分と面積の問題です。(ii-i)のときに $S(a)$ は最大値をとることがわかりますので，この場合に集中して計算を行うことが重要です。