1

解答例のページへ

座標平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$ を考える。実数 $0<t<1$ に対して，線分 AB, BC, CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする。さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする。

(1)　点 U_t の座標を求めよ。

(2)　t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　a を $0<a<1$ を満たす実数とする。t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

(1)　$x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ。

(2)　次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$

3

解答例のページへ

平行四辺形 ABCD において，$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = b$，$a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。

ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle \mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を a，b を用いて表せ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし，$f_a(x)=x^2+x-a$ とおく。

(1)　n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ。

(2)　$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件(i)，(ii)が同値であることを示せ。

(i)　$N_a=1$ である。

(ii)　$4a+1$ は素数である。

5

解答例のページへ

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える。

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ，札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から A_1，A_2，$\cdots$，A_n であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 (T_1)，(T_2)，$\cdots$，(T_{n-1}) を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 (T_{n-1})，$\cdots$，(T_2)，(T_1) を順に行ったところ，札の数字は左から 1，2，$\cdots$，n と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1)　A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2)　最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，$\cdots$，A_n の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

$\boxed{6}$

解答例のページへ

複素数平面上の点$\dfrac{1}{2}$を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

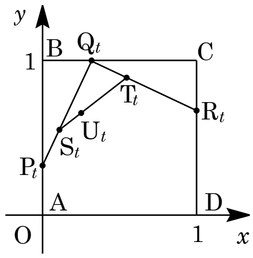
(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を(2)で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$に対し，線分 AB, BC, CD を$t:(1-t)$に内分する点をP_t，Q_t，R_tとすると，

$$\overrightarrow{OP_t}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(0,\ t)$$
$$\overrightarrow{OQ_t}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=(t,\ 1)$$
$$\overrightarrow{OR_t}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}=(1,\ 1-t)$$

さらに，線分P_tQ_t，Q_tR_tを$t:(1-t)$に内分する点をS_t，T_t，線分S_tT_tを$t:(1-t)$に内分する点をU_tとすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OU_t}&=(1-t)\overrightarrow{OS_t}+t\overrightarrow{OT_t}=(1-t)\{(1-t)\overrightarrow{OP_t}+t\overrightarrow{OQ_t}\}+t\{(1-t)\overrightarrow{OQ_t}+t\overrightarrow{OR_t}\}\\&=(1-t)^2\overrightarrow{OP_t}+2t(1-t)\overrightarrow{OQ_t}+t^2\overrightarrow{OR_t}\\&=(1-t)^2(0,\ t)+2t(1-t)(t,\ 1)+t^2(1,\ 1-t)\\&=(2t^2-2t^3+t^2,\ t-2t^2+t^3+2t-2t^2+t^2-t^3)\\&=(-2t^3+3t^2,\ -3t^2+3t)\end{aligned}$$

これより，$U_t(-2t^3+3t^2,\ -3t^2+3t)$となる。

(2)　$U_t(x,\ y)$とおくと，$x=-2t^3+3t^2$，$y=-3t^2+3t$となり，この式は$t=0,\ 1$でも成り立ち，$0\leqq t\leqq 1$において，

$$\frac{dx}{dt}=-6t^2+6t=-6t(t-1)$$
$$\frac{dy}{dt}=-6t+3=-3(2t-1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$		$+$	0
x	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

これより，点U_tの軌跡と線分 AD で囲まれた部分の面積Sは，$S=\int_0^1 y\,dx$と表せ，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1(-3t^2+3t)(-6t^2+6t)\,dt\\&=18\int_0^1(t^4-2t^3+t^2)\,dt\\&=18\Big[\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}\Big]_0^1=18\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

(3)　$$\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2=36t^2(t-1)^2+9(2t-1)^2=9(4t^4-8t^3+8t^2-4t+1)$$
$$=9(2t^2-2t+1)^2$$

すると，$0<a<1$のとき，$0\leqq t\leqq a$における点U_tの軌跡の長さLは，

$$L=\int_0^a\sqrt{9(2t^2-2t+1)^2}\,dt=3\int_0^a|2t^2-2t+1|\,dt$$

ここで，$2t^2-2t+1=(t-1)^2+t^2>0$から，

$$L=3\int_0^a (2t^2-2t+1)\,dt=3\Big[\,\frac{2}{3}t^3-t^2+t\,\Big]_0^a=2a^3-3a^2+3a$$

［コメント］

パラメータ曲線と面積についての基本題です。(3)の被積分関数は平方根が外れるはずと思って計算をしています。

2

問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=x-1-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)\geqq 0$ から，

$$\log x\leqq x-1$$

(2)　(1)より，$x>0$ のとき，$\log\left(\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\dfrac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}$ となる。

ここで，$I_n=n\displaystyle\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$ とおくと，

$$I_n\leqq n\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}dx=\frac{n}{2}\Big[\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}-x\Big]_1^2=\frac{n}{2}\left\{\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n+1}{n}}-1\right)-1\right\}$$

$$=\frac{n}{2(n+1)}\left\{n\left(2^{1+\frac{1}{n}}-1\right)-n-1\right\}=\frac{n}{2(n+1)}\left(2n\cdot 2^{\frac{1}{n}}-2n-1\right)$$

$$=\frac{n}{n+1}\left\{n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right)$$

さて，$g(x)=2^x$ とおくと，$g'(x)=2^x\log 2$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)}{\frac{1}{n}}=g'(0)=\log 2$$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{2}dx=1\cdot\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)=\log 2-\frac{1}{2}$ ………①

また，$x>0$ のとき，相加平均と相乗平均の関係から，$\dfrac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\geqq\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}}=x^{\frac{1}{2n}}$

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\log x^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2n}\log x$$

すると，$I_n\geqq n\displaystyle\int_1^2\frac{1}{2n}\log x\,dx=\frac{1}{2}\Big[x\log x-x\Big]_1^2=\log 2-\frac{1}{2}$ ………②

①②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\log 2-\frac{1}{2}$ となる。

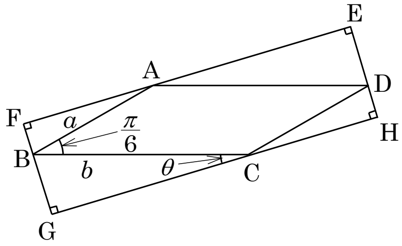
［コメント］

定積分と極限についての問題です。(2)では，(1)の流れから①は導けますが，②は誘導なしのため難しく，最初は真数の分子の 1 をカットしてと考えたのですが……。

3

問題のページへ

(1)　$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，$AB=a$，$BC=b$，$a\leqq b$ である



平行四辺形 ABCD の面積は，$ab\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}ab$

$\angle BCG=\theta$ から，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\triangle BCG=\frac{1}{2}b\cos\theta\cdot b\sin\theta=\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta$$

$\angle BAF+\theta=\dfrac{\pi}{6}$ から，$\angle BAF=\dfrac{\pi}{6}-\theta$ となり，

$$\triangle ABF=\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cdot a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{1}{8}a^2(\sqrt{3}\cos 2\theta-\sin 2\theta)$$

ここで，$\triangle DAE\equiv\triangle BCG$，$\triangle CDH\equiv\triangle ABF$ から，長方形 EFGH の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ab+2\cdot\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta+2\cdot\frac{1}{8}a^2(\sqrt{3}\cos 2\theta-\sin 2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}ab+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta+\frac{1}{4}(2b^2-a^2)\sin 2\theta$$

(2)　$f(\theta)=\sqrt{3}a^2\cos 2\theta+(2b^2-a^2)\sin 2\theta$ とおくと，$S=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{4}f(\theta)$ となる。

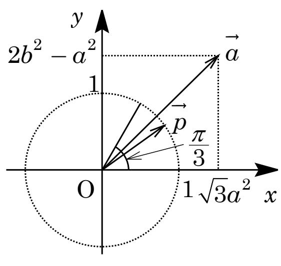
ここで，$\vec{a}=(\sqrt{3}a^2,\ 2b^2-a^2)$，$\vec{p}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおくと，$f(\theta)=\vec{a}\cdot\vec{p}$ となり，以下，$0\leqq 2\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のもとで $f(\theta)$ の最大値を求める。

さて，$|\vec{a}|=\sqrt{3a^4+(2b^2-a^2)^2}=\sqrt{4a^4-4a^2b^2+4b^4}=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$ となり，$\tan\alpha=\dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}$ とおくと，$\sqrt{3}a^2>0$，$2b^2-a^2>0$ から $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であり，

・$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\tan\alpha\leqq\sqrt{3}$ から $2b^2-a^2\leqq 3a^2$ となり，$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$

・$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\tan\alpha>\sqrt{3}$ から $2b^2-a^2>3a^2$ となり，$b>\sqrt{2}a$

(i)　$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a\ \left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき



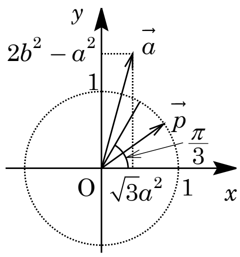
$f(\theta)$ が最大になるのは $\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角が最小，すなわち $2\theta=\alpha\ \left(\theta=\dfrac{\alpha}{2}\right)$ のときである。

$|\vec{p}|=1$ に注意すると，$f(\theta)$ の最大値は，

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\cdot 1\cdot\cos 0$$
$$=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

したがって，S の最大値は $S=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$ である。

(ii)　$b > \sqrt{2}a\left(\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$f(\theta)$が最大になるのは$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角が最小，すなわち$2\theta = \dfrac{\pi}{3}\left(\theta = \dfrac{\pi}{6}\right)$のときであり，$f(\theta)$の最大値は,

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}a^2\cos\frac{\pi}{3} + (2b^2 - a^2)\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(2b^2 - a^2) = \sqrt{3}b^2$$

したがって，Sの最大値は$S = \dfrac{1}{2}ab + \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$である。

［コメント］

三角関数の応用問題です。(2)はサインでの合成で処理をしてもよいのですが，係数が複雑なので，図から判断できる内積を利用しました。

4

問題のページへ

(1)　$f_a(n)=n^2+n-a$ (a, n は正の整数)が平方数のとき，$n>a$ と仮定すると，

$$f_a(n)-n^2=n-a>0,\ f_a(n)-(n+1)^2=-n-a-1<0$$

すると，$n^2<f_a(n)<(n+1)^2$ となり，$f_a(n)$ は平方数でない。

よって，$f_a(n)$ が平方数ならば，$n\leqq a$ である。

(2)　$f_a(n)$ が平方数となるとき，$n^2+n-a=m^2$ (m は 0 以上の整数)と表せ，

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-a-\frac{1}{4}=m^2,\ (2n+1)^2-4m^2=4a+1$$

これより，$(2n+2m+1)(2n-2m+1)=4a+1\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とすると，

(Ⅰ) $4a+1$ が素数であるとき　$2n+2m+1\geqq 2n-2m+1$ なので，$(*)$から，

$$2n+2m+1=4a+1,\ 2n-2m+1=1$$

これより，$m=n=a$ だけとなり，$N_a=1$ である。

(Ⅱ) $4a+1$ が素数でないとき　$4a+1=pq$ (p, q は $p\geqq q\geqq 3$ を満たす正の整数)

さて，p，q を 4 で割った余りと，pq を 4 で割った余りを対応させると右表のようになり，$4a+1\equiv 1 \pmod 4$ から，

p \ q	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$$(p,\ q)=(4k+1,\ 4l+1),\ (4k-1,\ 4l-1)$$

ただし，k, l は $k\geqq l$ を満たす正の整数である。

このとき，$(*)$を満たすのは，次の(a)，(b)という少なくとも 2 つの場合が考えられる。

(a)　$2n+2m+1=pq$，$2n-2m+1=1$ のとき

(Ⅰ)と同様に，$n=m=a=\dfrac{pq-1}{4}$ で成り立つ。

$(p,\ q)=(4k+1,\ 4l+1)$ のときは $n=4kl+k+l>0$，$(p,\ q)=(4k-1,\ 4l-1)$ のときは $n=4kl-k-l>0$ となり，これより $N_a\geqq 1$ である。

(b)　$2n+2m+1=p$，$2n-2m+1=q$ のとき

$4m=p-q=4k-4l$ から $m=k-l\geqq 0$ となり，$(p,\ q)=(4k+1,\ 4l+1)$ のときは $n=k+l>0$，$(p,\ q)=(4k-1,\ 4l-1)$ のときは $n=k+l-1>0$ となり，n の値が(a)の場合と異なるので，(a)(b)を合わせると $N_a\geqq 2$，すなわち $N_a\neq 1$ である。

(Ⅰ)(Ⅱ)より，「$N_a=1$ である」と「$4a+1$ は素数である」は同値である。

[コメント]

整数を題材にした論証問題です。(1)は，$n>a$ のとき $f_a(n)>n^2$ がすぐにわかるので，$f_a(n)<(n+1)^2$ を示せばよいことになります。(2)では，$4a+1$ を作る変形をして$(*)$を導いています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　最初，数字の列が A_1，A_2，…，A_n であったとき，与えられた操作(T_1)，(T_2)，…，(T_{n-1})，(T_{n-1})，…，(T_2)，(T_1)を行ったところ，数字の列が1，2，…，n となった。

このとき，A_1 と A_2 がともに3以上であったと仮定する。

(i)　$3 \leqq A_1 < A_2$ のとき

A_1，A_2，…，A_n に(T_1)を行うと左端は A_1 のままで，さらに(T_2)，…，(T_{n-1})，(T_{n-1})，…，(T_2)，(T_1)を行うと，A_1 は左端から1番目または2番目である。これより，数字が1，2，…，n に並ぶことはない。

(ii)　$A_1 > A_2 \geqq 3$ のとき

A_1，A_2，…，A_n に(T_1)を行うと左端は A_2 になり，さらに(T_2)，…，(T_{n-1})，(T_{n-1})，…，(T_2)，(T_1)を行うと，A_2 は左端から1番目または2番目である。これより，数字が1，2，…，n に並ぶことはない。

(i)(ii)より，A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は2以下である。

(2)　条件を満たす A_1，A_2，…，A_n の並び方の総数を c_n とすると，(1)から，

(Ⅰ)　$A_1 = 1$ のとき

$$1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_2),\ \cdots,\ (T_{n-1}),\ (T_{n-1}),\ \cdots,\ (T_2)}$$
$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_2，A_3，…，A_n が2，3，…，n に対応することから，並び方は c_{n-1} 通りとなる。

(Ⅱ)　$A_2 = 1$ のとき

$$A_1,\ 1,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ A_1,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_2),\ \cdots,\ (T_{n-1}),\ (T_{n-1}),\ \cdots,\ (T_2)}$$
$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_1，A_3，…，A_n が2，3，…，n に対応することから，並び方は c_{n-1} 通りとなる。

(Ⅲ)　$A_1 = 2$，$A_2 \neq 1$ のとき

$$2,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_1)} 2,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_2),\ \cdots,\ (T_{n-1}),\ (T_{n-1}),\ \cdots,\ (T_2)}$$
$$2,\ 1,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_2，A_3，…，A_n が1，3，…，n に対応することから，並び方は c_{n-1} 通りとなるが，この中に $A_2 = 1$ の場合も含まれる。そこで，$A_2 = 1$ の場合について調べると，

$$2,\ 1,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_1),\ (T_2)} 1,\ 2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_3),\ \cdots,\ (T_{n-1}),\ (T_{n-1}),\ \cdots,\ (T_3)}$$
$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(T_2),\ (T_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_3，…，A_n が3，…，n に対応することから，除外する並び方は c_{n-2} 通りとなる。

したがって，$A_1 = 2$，$A_2 \neq 1$ のときの並び方は $c_{n-1} - c_{n-2}$ 通りである。

(Ⅳ)　$A_2 = 2$，$A_1 \neq 1$ のとき

$$A_1,\ 2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_1)} 2,\ A_1,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(T_2),\ \cdots,\ (T_{n-1}),\ (T_{n-1}),\ \cdots,\ (T_2)}$$
$$2,\ 1,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(T_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_1，A_3，$\cdots$，A_n が $1,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対応することから，並び方は c_{n-1} 通りとなるが，この中に $A_1=1$ の場合も含まれる。そこで，$A_1=1$ の場合について調べると，

$$1,\ 2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_1),\ (\mathrm{T}_2)} 1,\ 2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n \xrightarrow{(\mathrm{T}_3),\ \cdots,\ (\mathrm{T}_{n-1}),\ (\mathrm{T}_{n-1}),\ \cdots,\ (\mathrm{T}_3)}$$

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n \xrightarrow{(\mathrm{T}_2),\ (\mathrm{T}_1)} 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

A_3，$\cdots$，A_n が $3,\ \cdots,\ n$ に対応することから，除外する並び方は c_{n-2} 通りとなる。

したがって，$A_2=2$，$A_1\neq 1$ のときの並び方は $c_{n-1}-c_{n-2}$ 通りである。

(Ⅰ)～(Ⅳ)より，条件を満たす A_1，A_2，$\cdots$，A_n の並び方の総数 c_n は，

$$c_n=c_{n-1}+c_{n-1}+(c_{n-1}-c_{n-2})+(c_{n-1}-c_{n-2})=4c_{n-1}-2c_{n-2}$$

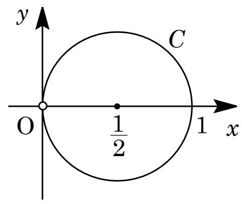
［コメント］

場合の数と漸化式のかなり難しめの問題です。(2)は(1)の結論をもとに場合分けを行いますが，重複する場合の処理が重要です。具体的に，たとえば $n=4$ のときを書き並べてチェックすると，その構図がみえてきます。

6

問題のページへ

(1)　複素数 z は，点$\dfrac{1}{2}$を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円から原点を除いた曲線 C 上にあるので，$\left|z-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ $(z\neq 0)$ ………①



ここで，$w=\dfrac{1}{z}$ とおくと $z=\dfrac{1}{w}$ となり，①に代入すると，

$$\left|\frac{1}{w}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ \left|\frac{2-w}{2w}\right|=\frac{1}{2},\ \frac{|w-2|}{2|w|}=\frac{1}{2}$$

これより，$|w|=|w-2|$ となり，点 w は原点と点 2 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。すなわち，w の実部は$\dfrac{0+2}{2}=1$ である。

(2)　α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，(1)から，

$$\frac{1}{\alpha}=1+ai,\ \frac{1}{\beta}=1+bi\quad(a,\ b \text{ は異なる実数})$$

このとき，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=(1+ai)^2+(1+bi)^2=2-a^2-b^2+2(a+b)i$

ここで，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=x+yi$ とおくと，

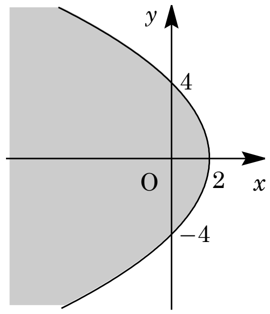
$$x=2-a^2-b^2=2-(a+b)^2+2ab\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=2(a+b)\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より $a+b=\dfrac{y}{2}$ ……④となり，②から $ab=\dfrac{1}{2}\left(x-2+\dfrac{y^2}{4}\right)=\dfrac{4x+y^2-8}{8}$ ……⑤

④⑤を満たす異なる実数 a，b が存在することは，t についての 2 次方程式 $t^2-\dfrac{y}{2}t+\dfrac{4x+y^2-8}{8}=0$ が異なる 2 実数解をもつことに対応するので，$D=\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-4\cdot\dfrac{4x+y^2-8}{8}>0$ から，

$$y^2-2(4x+y^2-8)>0$$

これより，$y^2<-8(x-2)$ となり，$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(3)　条件より，複素数 $\gamma=x+yi$ が $y^2\geqq -8(x-2)$ ……⑥を満たすとき，

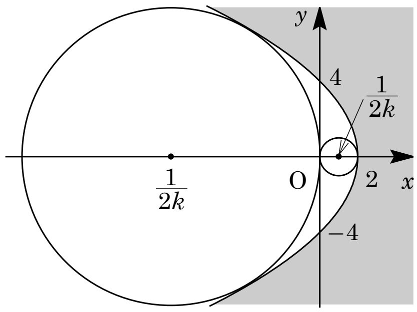
$$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

さて，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部を k とおくと，$k=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ から，$k(x^2+y^2)-x=0$ ………⑦

以下，xy 平面で考え，⑥の条件のもとで，⑦の k がとりうる範囲を求める。

まず，⑥の表す領域は右図の網点部（境界を含む）であり，

(i)　$k=0$ のとき　⑦から $x=0$ となり，$k=0$ はとりうる。



(ii)　$k \neq 0$ のとき　⑦より $x^2+y^2-\frac{1}{k}x=0$ から，

$$\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\frac{1}{4k^2}$$

中心 $\left(\frac{1}{2k},\ 0\right)$ で原点を通る円を表し，この円が⑥と共有点をもつ k の範囲を求めると，

(ii-i)　$k>0$ のとき

右図から $\frac{1}{2k} \geqq 1$ (等号は $x=2,\ y=0$ のとき)となり，$k \leqq \frac{1}{2}$ である。これより，$0<k \leqq \frac{1}{2}$ である。

(ii-ii)　$k<0$ のとき

右図から，⑥の境界線 $y^2=-8(x-2)$ と⑦を連立し，共有点をもつときは，

$$x^2-8(x-2)-\frac{1}{k}x=0,\ x^2-\left(8+\frac{1}{k}\right)x+16=0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑧が実数解をもつので，$D=\left(8+\frac{1}{k}\right)^2-64=\frac{1}{k^2}+\frac{16}{k} \geqq 0$ となり，$1+16k \geqq 0$

すると，$k \geqq -\frac{1}{16}$ (等号は $x=-4,\ y=\pm 4\sqrt{3}$ のとき) から，$-\frac{1}{16} \leqq k<0$ である。

(i)(ii)より，$-\frac{1}{16} \leqq k \leqq \frac{1}{2}$ となり，k の最大値は $\frac{1}{2}$，最小値は $-\frac{1}{16}$ である。

［コメント］

複素数平面についての問題です。(3)は，(1)と(2)の流れから，不等式で条件づけられた最大・最小問題として解きましたが，極座標を使うという手もありました。