$\boxed{1}$

解答例のページへ

(1)　関数 $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ の区間 $-1 \leqq \theta \leqq 1$ における最大値 M および最小値 m を求めよ。

(2)　(1)で定めた M に対し，次の不等式を示せ。

$$\frac{7}{8}\pi \leqq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x)\,dx \leqq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

2

解答例のページへ

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y)\,|\,x,\ y \text{ は } 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる 3 点を選ぶ。ただし，どの 3 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を p_n とする。

(1)　p_5 を求めよ。

(2)　m を 2 以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

座標空間内の原点を中心とする半径 5 の球面を S とする。S 上の相異なる 3 点 P, Q, R が次の条件を満たすように動く。

条件：P, Q は xy 平面上にあり，三角形 PQR の重心は G(2, 0, 1) である。

以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2) 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

k を実数とし，座標平面上の曲線 C を $y=x^3-kx$ で定める。C 上の 2 点 P，Q に対する以下の条件(∗)を考える。

条件(∗)　原点 O，点 P，点 Q は相異なり，C の O，P，Q における接線のうち，どの 2 本も交わり，そのなす角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2 直線のなす角は 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1)　条件(∗)を満たす P, Q が存在するような k の範囲を求めよ。

(2)　k が(1)で定まる範囲にあるとする。P，Q が条件(∗)を満たすように動くとき，C の O，P，Q における接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし，3 本の接線が 1 点で交わるときは $S=0$ とする。$M=4m$ となる k の値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。複素数αと C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対し，$w=(z-\alpha)^3$ とおく。P が C 上を動くときの点$\mathrm{Q}(w)$の軌跡を D とする。

(1)　$\alpha=-3$ とし，w の偏角をθとおく。P が C 上を動くとき，$\sin\theta$がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　αが次の条件を満たすように動く。

条件：D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ。

複素数平面上の点$\mathrm{R}(\alpha)$が動きうる範囲の面積を求めよ。

$\boxed{6}$

解答例のページへ

n を正の整数とする。n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする。

(1)　$f(2800)$，$g(2800)$ を求めよ。

(2)　$f(n) \geqq g(n)$ を示せ。

(3)　$g(n) = 15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}\ (-1\leqq\theta\leqq 1)$ に対し，$f(-\theta)=-\sin\theta+\theta-\dfrac{\theta^3}{6}=-f(\theta)$

$f(\theta)$ は奇関数であることより，以下，$0\leqq\theta\leqq 1$ で $f(\theta)$ の増減を調べると，

$$f'(\theta)=\cos\theta-1+\frac{\theta^2}{2},\quad f''(\theta)=-\sin\theta+\theta,\quad f'''(\theta)=-\cos\theta+1\geqq 0$$

これより，$0\leqq\theta\leqq 1$ において $f''(\theta)$ は単調に増加し，$f''(\theta)\geqq f''(0)=0$

さらに，$0\leqq\theta\leqq 1$ において $f'(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)\geqq f'(0)=0$

すると，$0\leqq\theta\leqq 1$ における $f(\theta)$ の増減は右表のようになり，最大値 $\sin 1-\dfrac{5}{6}$，最小値 0 である。

θ	0	$\cdots$	1
$f'(\theta)$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\sin 1-\dfrac{5}{6}$

したがって，$-1\leqq\theta\leqq 1$ において $f(\theta)$ は最大値 $M=\sin 1-\dfrac{5}{6}$，最小値 $m=-\sin 1+\dfrac{5}{6}$ をとる。

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx$ とおき，被積分関数に加法定理を適用すると，

$$I=\int_0^{2\pi}\{\sin(\cos x)\cos x-\cos(\cos x)\sin x\}dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx-\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx-\Big[-\sin(\cos x)\Big]_0^{2\pi}=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx+\int_\pi^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$$

ここで，$u=x-\pi$ とおくと，$du=dx$ で，$x=\pi\to 2\pi$ のとき $u=0\to\pi$ より，

$$\int_\pi^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\sin(\cos(u+\pi))\cos(u+\pi)\,du$$
$$=\int_0^{\pi}\sin(-\cos u)(-\cos u)\,du=\int_0^{\pi}\sin(\cos u)\cos u\,du$$

すると，$I=2\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx$ となり，

$$I=2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx\right\}$$

さらに，$v=\pi-x$ とおくと，$dv=-dx$ で，$x=\dfrac{\pi}{2}\to\pi$ のとき $v=\dfrac{\pi}{2}\to 0$ より，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin(\cos(\pi-v))\cos(\pi-v)(-dv)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(-\cos v)(-\cos v)\,dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos v)\cos v\,dv$$

したがって，$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\cos x)\cos x\,dx$ ………(＊)

さて，$\theta=\cos x$ とおくと，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0\leqq\theta\leqq 1$ であることに注意すると，(1)から，$0\leqq f(\theta)\leqq M$ なので，

$$0\leqq\sin\theta-\theta+\frac{\theta^3}{6}\leqq M\,,\quad \theta-\frac{\theta^3}{6}\leqq\sin\theta\leqq\theta-\frac{\theta^3}{6}+M$$

これより，$\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}\leqq\sin(\cos x)\leqq\cos x-\dfrac{\cos^3x}{6}+M$ となり，

$$\cos^2x-\frac{\cos^4x}{6}\leqq\sin(\cos x)\cos x\leqq\cos^2x-\frac{\cos^4x}{6}+M\cos x$$

ここで，各辺を 4 倍し，0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで積分すると，(＊)から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2x-\frac{2}{3}\cos^4x\right)dx\leqq I\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^2x-\frac{2}{3}\cos^4x+4M\cos x\right)dx$$

すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}4M\cos x\,dx=4M\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4M$ であり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)^2\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$$

以上より，$4\cdot\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{16}\pi\leqq I\leqq 4\cdot\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{16}\pi+4M$ から，

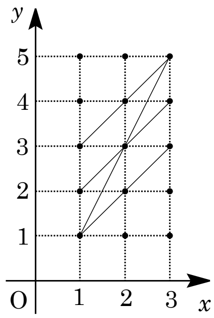
$$\frac{7}{8}\pi\leqq\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

［コメント］

定積分と不等式についての問題で，(1)の式から，(2)の被積分関数に対する評価式を作るという，よく見かけるタイプのものです。ただ，定積分の区間を 4 つに分ける点が高いハードルになっていました。というのも，$4M$ の匂いになかなか気付かず……。

2

問題のページへ



(1)　領域$1 \leqq x \leqq 3$，$1 \leqq y \leqq 5$にある 15 個の格子点から，相異なる 3 点を選ぶ${}_{15}\mathrm{C}_3 = 455$通りが同様に確からしいとする。

まず，選んだ 3 点が同一直線上にある場合を調べると，

(i)　直線$x = k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$) 上のとき　${}_5\mathrm{C}_3 \times 3 = 30$通り

(ii)　直線$y = k$ ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$) 上のとき　${}_3\mathrm{C}_3 \times 5 = 5$通り

(iii) 傾き± 1の直線上のとき

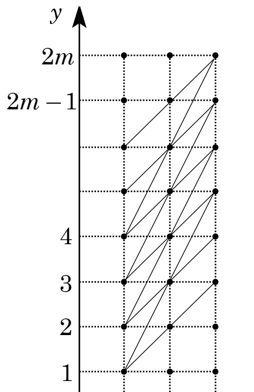
傾き 1 の直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+1)$，$(3,\ k+2)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+2 \leqq 5$から$k = 1,\ 2,\ 3$である。このとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 3 = 3$通りの場合があり，傾き$-1$の直線上も同様に 3 通りより，合わせて$3+3 = 6$通りとなる。

(iv) 傾き± 2の直線上のとき

傾き 2 の直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+2)$，$(3,\ k+4)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+4 \leqq 5$から$k = 1$のみである。このとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 1 = 1$通りの場合があり，傾き$-2$の直線上も同様に 1 通りより，合わせて$1+1 = 2$通りとなる。

(i)〜(iv)より，選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率p_5は，

$$p_5 = 1 - \frac{30+5+6+2}{455} = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$



(2)　m が 2 以上の整数のとき，領域$1 \leqq x \leqq 3$，$1 \leqq y \leqq 2m$にある$3 \times 2m = 6m$個の格子点から，相異なる 3 点を選ぶ${}_{6m}\mathrm{C}_3 = m(6m-1)(6m-2)$通りが同様に確からしいとする。

まず，選んだ 3 点が同一直線上にある場合を調べると，

(i)　直線$x = k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$) 上のとき

$${}_{2m}\mathrm{C}_3 \times 3 = m(2m-1)(2m-2)\text{ 通り}$$

(ii)　直線$y = k$ ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2m$) 上のとき

$${}_3\mathrm{C}_3 \times 2m = 2m\text{ 通り}$$

(iii) 傾き$\pm l$ (lは自然数) の直線上のとき

傾きlの直線は，3 点$(1,\ k)$，$(2,\ k+l)$，$(3,\ k+2l)$を結んだもので，$1 \leqq k$かつ$k+2l \leqq 2m$から$1 \leqq k \leqq 2m-2l$となる。

すると，l のとりうる値は$1 \leqq 2m-2l$から$l = 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$であり，たとえば$l = 1$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times (2m-2) = 2m-2$通り，$l = 2$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times (2m-4) = 2m-4$通り，…，$l = m-1$のとき${}_3\mathrm{C}_3 \times 2 = 2$通りの場合がある。

傾き$-l$の直線上も同様なので，合わせて，

$$\{(2m-2)+(2m-4)+\cdots+2\} \times 2 = 4\{(m-1)+(m-2)+\cdots+1\}$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(m-1)m = 2m(m-1)\text{ 通り}$$

(i)～(iii)より，選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率 p_{2m} は，

$$p_{2m}=1-\frac{m(2m-1)(2m-2)+2m+2m(m-1)}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$=1-\frac{2m(2m^2-3m+1+1+m-1)}{m(6m-1)(6m-2)}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{m(6m-1)(6m-2)}$$

$$=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{16m^2-7m}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$

［コメント］

格子点を題材にした確率問題です。(1)で具体例を計算し，(2)では(1)のプロセスを参考にして一般化するという流れになっています。

3

問題のページへ

原点を中心とする半径 5 の球面 S 上に相異なる 3 点 P, Q, R がある。

点 P, Q は xy 平面上より，$0 \leqq \varphi < 2\pi$，$0 \leqq \varphi' < 2\pi$ として，$\mathrm{P}(5\cos\varphi,\ 5\sin\varphi,\ 0)$，$\mathrm{Q}(5\cos\varphi',\ 5\sin\varphi',\ 0)$ とおく。ただし，$\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ から $\varphi \neq \varphi'$ である。

また，$\mathrm{R}(r_1,\ r_2,\ r_3)$ $(r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 = 25)$ とすると，△PQR の重心 G$(2,\ 0,\ 1)$ から，

$$\frac{5\cos\varphi + 5\cos\varphi' + r_1}{3} = 2,\ \frac{5\sin\varphi + 5\sin\varphi' + r_2}{3} = 0,\ \frac{r_3}{3} = 1$$

すると，$r_3 = 3$ となり，これから $r_1{}^2 + r_2{}^2 = 16$ なので，$0 \leqq \theta < 2\pi$ として $\mathrm{R}(4\cos\theta,\ 4\sin\theta,\ 3)$ と表せる。なお，このとき $\mathrm{P} \neq \mathrm{R}$，$\mathrm{Q} \neq \mathrm{R}$ は満たされており，

$$5\cos\varphi + 5\cos\varphi' + 4\cos\theta = 6 \cdots\cdots①,\ 5\sin\varphi + 5\sin\varphi' + 4\sin\theta = 0 \cdots\cdots②$$

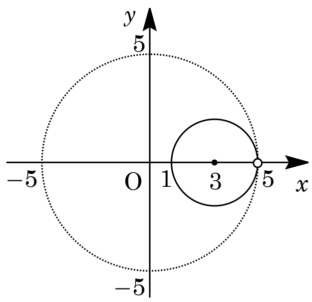
(1) 線分 PQ の中点 M を $\mathrm{M}(x,\ y,\ 0)$ とおくと，

$$x = \frac{5\cos\varphi + 5\cos\varphi'}{2} \cdots\cdots\cdots③,\ y = \frac{5\sin\varphi + 5\sin\varphi'}{2} \cdots\cdots\cdots④$$

①②より，$x = \dfrac{6 - 4\cos\theta}{2} = 3 - 2\cos\theta \cdots\cdots④$，$y = \dfrac{-4\sin\theta}{2} = -2\sin\theta \cdots\cdots⑤$

以下，xy 平面上で考えると，④⑤から $\cos\theta = -\dfrac{x-3}{2}$，$\sin\theta = -\dfrac{y}{2}$ となり，

$$\left(-\frac{x-3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{2}\right)^2 = 1,\ (x-3)^2 + y^2 = 4$$

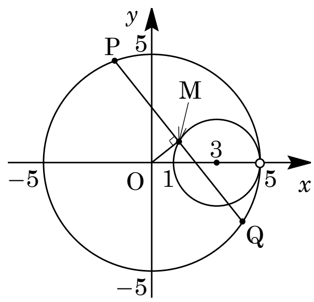


ここで，$\varphi = \varphi'$ のときは，③④から $x = 5\cos\varphi$，$y = 5\sin\varphi$ となり，$x^2 + y^2 = 25$ であるので，$\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$ すなわち $\varphi \neq \varphi'$ のときは $x^2 + y^2 \neq 25$ となる。

したがって，点 M の軌跡は，円 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ である。ただし，$x^2 + y^2 \neq 25$ から点 $(5,\ 0)$ を除く。

図示すると，右図の実線部である。ただし白丸は除く。

(2) 以下，xy 平面上で記す。



まず，線分 PQ は，その中点 M が $\mathrm{OM} \perp \mathrm{PQ}$ を満たすことに着目すると，点 M を通り法線ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ の直線の，2 点 P, Q にはさまれた部分，つまり領域 $x^2 + y^2 \leqq 25$ を満たす部分である。

ここで，④⑤から $\mathrm{M}(3 - 2\cos\theta,\ -2\sin\theta)$ とおける。ただし，点 $(5,\ 0)$ を除くことから，$\theta \neq \pi$ である。

これより，直線 PQ の方程式は，

$$(3 - 2\cos\theta)\{x - (3 - 2\cos\theta)\} + (-2\sin\theta)(y + 2\sin\theta) = 0$$

$$(3 - 2\cos\theta)x - (9 - 12\cos\theta + 4\sin^2\theta) - (2\sin\theta)y - 4\sin^2\theta = 0$$

$$(3 - 2\cos\theta)x - (2\sin\theta)y + 12\cos\theta - 13 = 0 \cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，直線 PQ の通過領域は，⑥を満たすθ $(0\leqq\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi)$が存在する条件となる。なお，$\theta=\pi$のときは，⑥は$x=5$となるので，$x^2+y^2\leqq 25$を満たす点$(5,\ 0)$を除く。逆に，⑥が点$(5,\ 0)$を通るのは$\cos\theta=-1$から$\theta=\pi$だけである。

そこで，⑥をθについてまとめて，

$$(-2x+12)\cos\theta-2y\sin\theta+3x-13=0$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{-2x+12}{\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2y}{\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}}$とおくと，$\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}\cos(\theta+\alpha)=-3x+13$となり，

$$\cos(\theta+\alpha)=\frac{-3x+13}{\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}}$$

すると，$\left|\dfrac{-3x+13}{\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}}\right|\leqq 1$から，$\left|-3x+13\right|\leqq\sqrt{(-2x+12)^2+4y^2}$

$$(-3x+13)^2\leqq(-2x+12)^2+4y^2,\ 5x^2-30x-4y^2\leqq -25$$

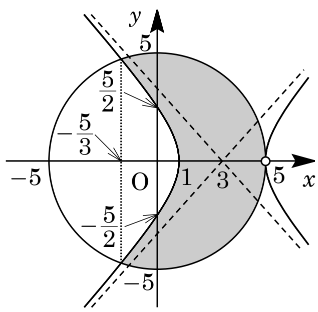
まとめると，$5(x-3)^2-4y^2\leqq 20$となり，

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1$$

以上より，線分 PQ の通過領域は，

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5}\leqq 1\ \text{かつ}\ x^2+y^2\leqq 25$$

図示すると，右図の網点部である。ただし，点$(5,\ 0)$以外の境界は含む。



［コメント］

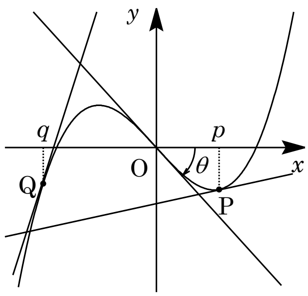
軌跡と領域の問題です。解答例では，点をパラメーターで設定して処理しています。難しい計算はないのですが，除外点についてのチェックなど，量的には多めです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x^3 - kx$ について, C 上の異なる 3 点 O, P, Q におけるどの接線も平行でなく，しかも交わる 2 接線のなす角がすべて $\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。このとき，まず $k \leqq 0$ ならば $y' = 3x^2 - k \geqq 0$ なので，どの接線の傾きも 0 以上になり，2 接線のなす角がすべて $\dfrac{\pi}{3}$ という条件に反する。

以下，$k > 0$ として，点 P, Q の x 座標をそれぞれ $x = p,\ q$ とし，さらに 3 点 O, P, Q における接線の傾きを，それぞれ m_o，m_p，m_q とおくと，



$$m_o = -k,\ m_p = 3p^2 - k,\ m_q = 3q^2 - k \cdots\cdots\cdots①$$

すると，$m_o \neq m_p$，$m_o \neq m_q$，$m_p \neq m_q$ から，

$$-k \neq 3p^2 - k,\ -k \neq 3q^2 - k,\ 3p^2 - k \neq 3q^2 - k$$

まとめると，$p \neq 0$，$q \neq 0$，$q \neq \pm p$ となり，このもとで, x 軸の正の部分から点 O における接線へのなす角を θ とすると,

$$m_o = \tan\theta,\ m_p = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),\ m_q = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$\tan\theta = -k < 0 \cdots\cdots$③であり，これより $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$ となり，

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 3p^2 - k \cdots\cdots\cdots④,\ \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3q^2 - k \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$-\dfrac{\pi}{6} < \theta + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{3}$ であるが，$-\dfrac{5}{6}\pi < \theta - \dfrac{\pi}{3} < -\dfrac{\pi}{3}$ については，$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ のときは不適となり，③から $k \neq -\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

以上より，$k > 0$ かつ $k \neq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のもとで,

④より，$\dfrac{\tan\theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = 3p^2 - k$ となり，③を代入すると $\dfrac{-k + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}k} = 3p^2 - k$ から,

$$p^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{-k + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}k} + k\right) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}k^2}{3(1 + \sqrt{3}k)} = \frac{k^2 + 1}{3k + \sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$\dfrac{\tan\theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\theta} = 3q^2 - k$ となり，③を代入すると $\dfrac{-k - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}k} = 3q^2 - k$ から,

$$q^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{-k - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}k} + k\right) = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}k^2}{3(1 - \sqrt{3}k)} = \frac{k^2 + 1}{3k - \sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦を満たす $p, q\ (p \neq 0,\ q \neq 0,\ q \neq \pm p)$ が存在する条件は,

$$\frac{k^2 + 1}{3k + \sqrt{3}} > 0,\ \frac{k^2 + 1}{3k - \sqrt{3}} > 0,\ \frac{k^2 + 1}{3k + \sqrt{3}} \neq \frac{k^2 + 1}{3k - \sqrt{3}}$$

すると，$k > 0$ かつ $k \neq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ から，$3k - \sqrt{3} > 0$ となり，$k > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

(2)　⑥⑦より，$\alpha=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$，$\beta=\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}$ とおくと，$p=\pm\alpha$，$q=\pm\beta$ となり，

$$-\beta<-\alpha<0<\alpha<\beta$$

ここで，点 O における接線の方程式は $y=-kx$，点 P における接線の方程式は

$$y-(p^3-kp)=(3p^2-k)(x-p),\ \ y=(3p^2-k)x-2p^3$$

2 接線の交点は，$-kx=(3p^2-k)x-2p^3$ より $x=\dfrac{2}{3}p$ となり，$\left(\dfrac{2}{3}p,\ -\dfrac{2}{3}pk\right)$

同様に，点 O における接線と点 Q における接線の交点は，$\left(\dfrac{2}{3}q,\ -\dfrac{2}{3}qk\right)$

すると，交点間の距離は，$\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}p-\dfrac{2}{3}q\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}pk+\dfrac{2}{3}qk\right)^2}=\dfrac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}$

これより，3 本の接線で囲まれる正三角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}|p-q|\sqrt{1+k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2(p-q)^2(1+k^2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(p-q)^2$$

すると，$(p-q)^2$ の最大値は $(\alpha+\beta)^2$，最小値は $(-\alpha+\beta)^2$ となり，S の最大値を M，最小値を m とおくと，

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(\alpha+\beta)^2,\ \ m=\frac{\sqrt{3}}{9}(k^2+1)(-\alpha+\beta)^2$$

$M=4m$ から，$(\alpha+\beta)^2=4(-\alpha+\beta)^2$ となり，$3\alpha^2-10\alpha\beta+3\beta^2=0$

$$(3\alpha-\beta)(\alpha-3\beta)=0$$

$0<\alpha<\beta$ より，$\beta=3\alpha$ となり，$\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k-\sqrt{3}}}=3\sqrt{\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}}$ から，

$$3k+\sqrt{3}=9(3k-\sqrt{3}),\ \ 24k-10\sqrt{3}=0$$

したがって，$k=\dfrac{5}{12}\sqrt{3}$ となり，この値は $k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を満たしている。

［コメント］

3 次曲線の接線を題材にした問題で，量的にかなり多めです。三角関数の加法定理と対称性を用いて，2 直線のなす角について調べる点がポイントです。

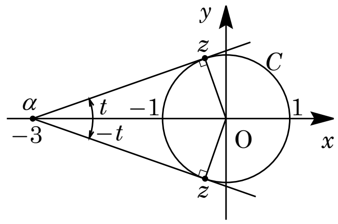
$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　複素数 α と原点を中心とする半径 1 の円 C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ に対し，$w=(z-\alpha)^3$ とする。ここで，w の偏角を θ とおくとき，

$$\theta=\arg w=\arg(z-\alpha)^3=3\arg(z-\alpha)$$

$\alpha=-3$ のとき，$-\pi<\arg(z-\alpha)\leqq\pi$ の範囲で考えると，右図から，$\sin t=\dfrac{1}{3}$ として，



$$-t\leqq\arg(z-\alpha)\leqq t,\ -3t\leqq 3\arg(z-\alpha)\leqq 3t$$

これより，$-3t\leqq\theta\leqq 3t$ ………①

さて，$0<\sin t<\dfrac{1}{2}$ より $0<t<\dfrac{\pi}{6}$ となるので，$0<3t<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$\sin\theta$ は $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調に増加することより，①から，

$$-\sin 3t\leqq\sin\theta\leqq\sin 3t \text{ ………②}$$

ここで，$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t=3\cdot\dfrac{1}{3}-4\cdot\dfrac{1}{27}=\dfrac{23}{27}$ であるので，②から，

$$-\frac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\frac{23}{27}$$

(2)　まず，$u=z-\alpha$ とおくと $w=u^3$ となり，$\arg w=3\arg u$ である。そして，$\arg u$ の範囲を $-\pi<\arg u\leqq\pi$ で考える。

さて，点 $\mathrm{Q}(w)$ の軌跡 D が実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点をもつ条件を，実軸の正の部分と実軸の負の部分に分けて調べると，

・D が実軸の正の部分と共有点をもつとき　$\arg w=-2\pi,\ 0,\ 2\pi$

点 u は，$\arg u=-\dfrac{2}{3}\pi,\ 0,\ \dfrac{2}{3}\pi$ ……③を満たす 3 本の半直線上にある。

・D が実軸の負の部分と共有点をもつとき　$\arg w=-\pi,\ \pi,\ 3\pi$

点 u は，$\arg u=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$ ……④を満たす 3 本の半直線上にある。

ここで，$z=u+\alpha$ かつ $|z|=1$ から，$|u+\alpha|=1$ となり，点 u は点 $\mathrm{R}'(-\alpha)$ を中心とする半径 1 の円周上にあることに注意すると，点 $\mathrm{R}'(-\alpha)$ の動きうる範囲は，③のときは右図 1 の網点部，④のときは右図 2 の網点部となる。

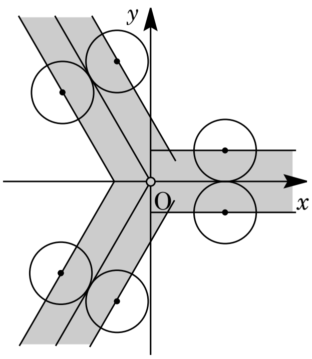


図 1

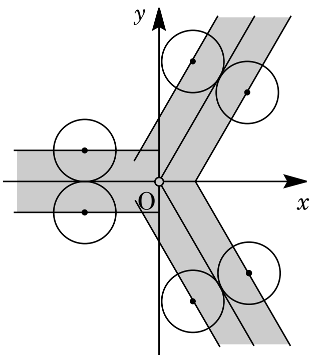


図 2

そして，D が実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点をもつ点 $\mathrm{R}'(-\alpha)$ の動きうる範囲は，図 1 と図 2 の網点部の共通部分となり，図示すると，図 3 の網点部である。

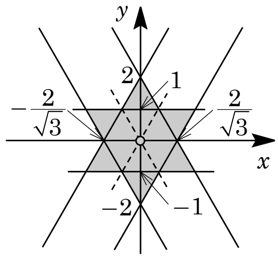


図 3

さらに，点 $\mathrm{R}(\alpha)$ と点 $\mathrm{R}'(-\alpha)$ は原点対称であり，図 3 の網点部も原点対称であることから，点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲は点 $\mathrm{R}'(-\alpha)$ の動きうる範囲と一致する。

以上より，点 $\mathrm{R}(\alpha)$ が動きうる範囲の面積 S は，1 辺の長さが $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形の 12 個分の面積となるので，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1\times 12=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

［コメント］

複素数平面上の軌跡を題材とした問題です。(2)では 3 本の半直線からの距離が 1 以下の点の存在領域を図 1 と図 2 で示し，その 2 つの図を重ね合わせて，その共通部分を図 3 として作るという作業が必要になりますが，フリーハンドではかなり難航すると思われます。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

正の整数 n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする。言い換えると，正の約数のうち，mod3 で，1 と合同になるものの個数を $f(n)$，-1 と合同になるものの個数を $g(n)$ とする。

(1)　$2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7$ より，左側の表は約数の組み合わせを示したもの，右側の表は左側の表を mod3 で書き直したものである。これより，正の約数の個数は，

素数	2	5	7
0 乗	2^0	5^0	7^0
1 乗	2^1	5^1	7^1
2 乗	2^2	5^2	
3 乗	2^3		
4 乗	2^4		

素数	2	5	7
0 乗	1	1	1
1 乗	-1	-1	1
2 乗	1	1	
3 乗	-1		
4 乗	1		

$$(4+1)\times(2+1)\times(1+1) = 30$$

そして，正の約数のうち，mod3 で，-1 と合同になるものの個数 $g(2800)$ は，

$$g(2800) = (3\times1+2\times2)\times2 = 7\times2 = 14$$

また，$f(2800)+g(2800) = 30$ から，$f(2800) = 30-14 = 16$ である。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，mod3 で，-1 と合同な素数を p_1，p_2，…，p_i，1 と合同な素数を q_1，q_2，…，q_j とおく。また，k_1，k_2，…，k_i，l_1，l_2，…，l_j，r を 0 以上の整数として，正の整数 n を素因数分解したとき，

$$n = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i}\cdot q_1^{l_1}\cdot q_2^{q_2}\cdots q_j^{l_j}\cdot 3^r$$

素数	p_1	p_2	…	p_i	q_1	q_2	…	q_j	3
0 乗	1	1	…	1	1	1	…	1	1
1 乗	-1	-1	…	-1	1	1	…	1	0
2 乗	1	1	…	1	1	1	…	1	0
3 乗	-1	-1	…	-1	1	1	…	1	0
4 乗	1	1	…	1	1	1	…	1	0
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮

n の正の約数のうち，mod3 で，1 と合同になるものの個数を $f(n)$，-1 と合同になるものの個数を $g(n)$ とすると，

$$f(n) = f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot f(q_1^{l_1}\cdot q_2^{q_2}\cdots q_j^{l_j})\cdot 1$$
$$= f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)\cdots\cdots\cdots①$$
$$g(n) = g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot g(q_1^{l_1}\cdot q_2^{q_2}\cdots q_j^{l_j})\cdot 1$$
$$= g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i}) - g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i}) = \dfrac{f(n)-g(n)}{(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)}$ となるので，まず，$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i}) \geqq g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})$ を数学的帰納法で証明する。

(i)　$i=1$ のとき

k_1 が奇数のとき，$f(p_1^{k_1}) = \dfrac{k_1+1}{2}$，$g(p_1^{k_1}) = \dfrac{k_1+1}{2}$ より，$f(p_1^{k_1}) = g(p_1^{k_1})$

k_1 が偶数のとき，$f(p_1^{k_1}) = \dfrac{k_1}{2}+1$，$g(p_1^{k_1}) = \dfrac{k_1}{2}$ より，$f(p_1^{k_1}) = g(p_1^{k_1})+1$

これより，$f(p_1^{k_1}) \geqq g(p_1^{k_1})$ である。

(ii)　$i=m$ のとき

$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}) \geqq g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})$ が成り立つと仮定する。

$\bmod 3$ で，$1\equiv 1\times 1$ または $1\equiv(-1)\times(-1)$ より，

$$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})=f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\cdot f(p_{m+1}^{k_{m+1}})+g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\cdot g(p_{m+1}^{k_{m+1}})\cdots\cdots\cdots③$$

$\bmod 3$ で，$-1\equiv 1\times(-1)$ または $-1\equiv(-1)\times 1$ より，

$$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})=f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\cdot g(p_{m+1}^{k_{m+1}})+g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\cdot f(p_{m+1}^{k_{m+1}})\cdots\cdots\cdots④$$

③と④の両辺の差をとると，

$$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})$$
$$=\{f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\}\{f(p_{m+1}^{k_{m+1}})-g(p_{m+1}^{k_{m+1}})\}$$

k_{m+1} が奇数のとき，$f(p_{m+1}^{k_{m+1}})=g(p_{m+1}^{k_{m+1}})=\dfrac{k_{m+1}+1}{2}$ から，

$$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})=0$$

k_{m+1} が偶数のとき，$f(p_{m+1}^{k_{m+1}})=\dfrac{k_{m+1}}{2}+1$，$g(p_{m+1}^{k_{m+1}})=\dfrac{k_{m+1}}{2}$ から，

$$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})$$
$$=f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m})\geqq 0$$

したがって，$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})\geqq g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}\cdot p_{m+1}^{k_{m+1}})$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\geqq g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdots\cdots\cdots(*)$

$(*)$の両辺に $(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)$ をかけると，①②から $f(n)\geqq g(n)$ である。

なお，$n=1$ のとき，$f(n)=1$，$g(n)=0$ から，$f(n)\geqq g(n)$ である。

したがって，すべて正の整数 n について，$f(n)\geqq g(n)$ が成り立つ。

(3)　(2)から，帰納的に $f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})-g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})$ の値は 0 または 1 である。

ここで，$g(n)=15$ であるとき，②から

$$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=15\cdots\cdots\cdots⑤$$

(a)　$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})$ のとき　①⑤より，

$$f(n)=g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})\cdot(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=15$$

たとえば，$p_1=2$，$q_1=7$ として，$n=2^1\times 7^{14}$ で満たされる。

(b)　$f(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})+1$ のとき　①⑤より，

$$f(n)=\{g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})+1\}\cdot(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)$$
$$=15+(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)$$

そして，$(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)$ は，⑤から 15 の正の約数なので，

・$(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=15$，$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=1$ では，$f(n)=15+15=30$

たとえば，$p_1=2$，$q_1=7$ として，$n=2^2\times 7^{14}$ で満たされる。

・$(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=5$，$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=3$ では，$f(n)=15+5=20$

たとえば，$p_1=2$，$q_1=7$ として，$n=2^6\times7^4$ で満たされる。

・$(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=3$，$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=5$ では，$f(n)=15+3=18$

たとえば，$p_1=2$，$q_1=7$ として，$n=2^{10}\times7^2$ で満たされる。

・$(l_1+1)(l_2+1)\cdots(l_j+1)=1$，$g(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_i^{k_i})=15$ では，$f(n)=15+1=16$

たとえば，$p_1=2$，$q_1=7$ として，$n=2^{30}\times7^0$ で満たされる。

(a)(b)より，$f(n)=15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 30$ である。

［コメント］

整数が題材の論証問題で，実質，時間無制限の難問です。(2)の結論は感覚的にはそのとおりなので，初め直接的に示そうとしましたが，偶奇の場合分けが大変そうなため，数学的帰納法のスタイルに変更しました。次の(3)では，(2)のプロセスの見ながら，解答例の 1 行目に記した差の値が 0 または 1 を見抜く必要があり……。