$\boxed{1}$

解答解説のページへ

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b は実数で，$b \neq 0$ とする。xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる。

(1)　△OPQ が鋭角三角形となるための $a,\ b$ の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　m, n を整数とする。a, b が(1)で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)　x は $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ をみたす角とする。

$$\begin{cases} \sin y = |\sin 4x| \\ \cos y = |\cos 4x| \\ 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ \end{cases}$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

(2)　α は $0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ をみたす角とする。

$0^\circ \leqq \theta_n \leqq 90^\circ$ をみたす角 θ_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \\ \sin \theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n| \\ \cos \theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n| \end{cases}$$

で定める。k を 2 以上の整数として，$\theta_k = 0^\circ$ となる α の個数を k で表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xyz 空間に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ \sqrt{3},\ 0)$をとる。△ABC を 1 つの面とし，$z\geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに△ABD を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 ABDE の $y\leqq 0$ の部分の体積を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$から，$f'(x)=0$は 2 つの実数解をもち，これを$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を$g(a)$とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}
g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\
&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\
&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3\\
&=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\
&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$g(a)$は$a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち$a=\pm1$のとき最小になる。

［解 説］

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題です。月刊誌『大学への数学』によく載っている上のような特殊な解法があります。しかし，この解法は知識として持っておかない限り，無理でしょう。ただし本問では，$f'(x)=0$の解が$x=\dfrac{2}{3}a,\ -\dfrac{2}{3a}$となりますので，$a$ の正負で場合分けをして，直接$g(a)$を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$b\neq 0$ より, 3 点 O, P, Q を結ぶと, 三角形ができる。

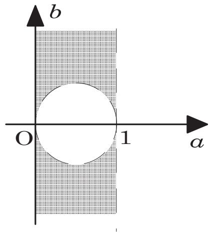
$\angle$QOP$<90^\circ$ より, $a>0$

$\angle$QPO$<90^\circ$ より, $a<1$

$\angle$OQP$<90^\circ$ より, Q は OP を直径とする円の外部にある。

すなわち, $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4}$

以上より, $0<a<1$, $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4}$



（境界は含まない）

(2)　$f(m,\ n)=(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2$ とおく。

$m=k$（k は整数）と固定して考えると,

$$f(k,\ n)=(k+na)^2-(k+na)+n^2b^2=\left(na+k-\frac{1}{2}\right)^2+(nb)^2-\frac{1}{4}$$

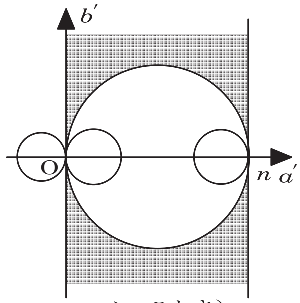
(i)　$n\neq 0$ のとき

$na=a'$, $nb=b'$ とおくと, $f(k,\ n)=\left(a'+k-\dfrac{1}{2}\right)^2+b'^2-\dfrac{1}{4}$

(1)より $0<\dfrac{a'}{n}<1$, $\left(\dfrac{a'}{n}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b'}{n}\right)^2>\dfrac{1}{4}$

$$0<|a'|<|n|,\ \left(a'-\frac{1}{2}n\right)^2+b'^2>\frac{1}{4}n^2\cdots\cdots(*)$$

$|n|\geqq 1$ で, k が整数より, 中心$\left(-k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 半径$\dfrac{1}{2}$の円と, 中心$\left(\dfrac{1}{2}n,\ 0\right)$, 半径$\dfrac{1}{2}|n|$の円が異なる 2 点で交わることはない。



（$n>0$のとき）

(*)の条件のもとで

$f(k,\ n)>0$, すなわち　$f(m,\ n)>0$

(ii)　$n=0$ のとき

$$f(m,\ 0)=m^2-m=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

m は整数より, $f(m,\ n)\geqq 0$（等号は $m=0,\ 1$ のとき成立）

(i)(ii)より, $f(m,\ n)=(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0$

［解 説］

(1)は基本的ですが, (2)は m, n と 2 つの文字が入っているためにかなり難しめです。上の解法は, $f(m,\ n)$ の形と(1)の円の式との類似性に注目したものです。なお, 昨年, 東京工大で似た問題が出ています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$0^\circ < y < 90^\circ$ なので，

(i)　$0^\circ \leqq 4x \leqq 90^\circ \left(0^\circ \leqq x \leqq \dfrac{45^\circ}{2}\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 4x$

(ii)　$90^\circ \leqq 4x \leqq 180^\circ \left(\dfrac{45^\circ}{2} \leqq x \leqq 45^\circ\right)$ のとき

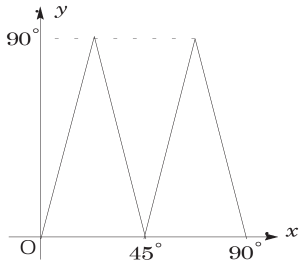
$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 180^\circ - 4x$

(iii)　$180^\circ \leqq 4x \leqq 270^\circ \left(45^\circ \leqq x \leqq \dfrac{135^\circ}{2}\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 4x - 180^\circ$

(iv)　$270^\circ \leqq 4x \leqq 360^\circ \left(\dfrac{135^\circ}{2} \leqq x \leqq 90^\circ\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 360^\circ - 4x$



(2)　(1)のグラフを $y = f(x)$ とすると，

$$\theta_1 = \alpha,\quad \theta_{n+1} = f(\theta_n)$$

(1)のグラフより，

$\theta_{n+1} = 90^\circ$ となる θ_n は 2 個

$\theta_{n+1} = 0^\circ$ となる θ_n は 3 個

$\theta_{n+1} = \beta\ (0^\circ < \beta < 90^\circ)$ となる θ_n は 4 個

$n \leqq k-1$ に対して，$\theta_k = 0^\circ$ となる θ_n の個数を a_n とすると，$a_{k-1} = 3$ となり，

$a_{n-1} = 4(a_n - 2) + 2 + 3 = 4a_n - 3$

$a_{n-1} - 1 = 4(a_n - 1)$

$a_1 - 1 = 4^{k-2}(a_{k-1} - 1)$ より，$a_1 = 4^{k-2}(a_{k-1} - 1) + 1 = 2\cdot 4^{k-2} + 1$

$\theta_k = 0^\circ$ となる θ_1，すなわち α の個数は，$2\cdot 4^{k-2} + 1$

［解 説］

前問と同じく, (1)は基本的なのですが, (2)は題意を把握するのにまず苦労します。こんなときは具体的に考え，試行錯誤することが必要です。たとえば $k = 3$ のときは，次のようになります。$\theta_3 = 0^\circ$ となる θ_2 は $\theta_2 = 0^\circ$，45°，90° の 3 個あります。さらに，$\theta_2 = 0^\circ$ に対しては $\theta_1 = 0^\circ$，45°，90°，$\theta_2 = 45^\circ$ に対しては(1)のグラフから θ_1 は 4 個，$\theta_2 = 90^\circ$ に対しては $\theta_1 = \dfrac{45^\circ}{2}$，$\dfrac{135^\circ}{2}$ となり，これらの θ_1 はすべて異なるので，合わせて $3 + 4 + 2 = 9$ 個となります。この考え方を一般化すると，上の解になります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$\triangle$ABC の重心 $G_1(0,\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ 0)$

$$DG_1=\sqrt{OD^2-OG_1{}^2}=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

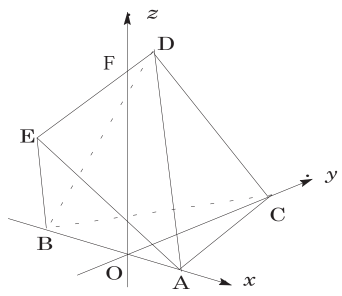
よって，$D(0,\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{6})$ となる。

すると，$\triangle$ABD の重心 $G_2(0,\ \frac{1}{9}\sqrt{3},\ \frac{2}{9}\sqrt{6})$

$\overrightarrow{G_2E}=-\overrightarrow{G_2C}$ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{G_2C}\\&=(0,\ \frac{1}{9}\sqrt{3},\ \frac{2}{9}\sqrt{6})-(0,\ \frac{8}{9}\sqrt{3},\ -\frac{2}{9}\sqrt{6})\\&=(0,\ -\frac{7}{9}\sqrt{3},\ \frac{4}{9}\sqrt{6})\end{aligned}$$

以上より，$E(0,\ -\frac{7}{9}\sqrt{3},\ \frac{4}{9}\sqrt{6})$



(2)　線分 DE と z 軸との交点を F とすると，

$$EF:FD=\frac{7}{9}\sqrt{3}:\frac{1}{3}\sqrt{3}=7:3$$

正四面体 ABDE の体積を V_0 とすると，

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin60^\circ\right)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

求める正四面体 ABDE の $y\leqq0$ の部分の体積 V は，

$$V=\frac{7}{10}V_0=\frac{7}{15}\sqrt{2}$$

［解 説］

合同な正四面体を 2 つ合わせた立体についての設問で，本年度の 4 題の中では最も基本的な問題です。(1)の E の座標を求めるにはいろいろな方法がありますが，$\triangle$AED の重心に注目するのが，計算量が一番少なくてすむでしょう。(2)も体積ということで一瞬構えてしまいますが，内容的には簡単です。なお，昨年，岡山大で類題が出ています。