1

解答解説のページへ

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n = 2,\ 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \qquad p_n = q_n x_n$$

とおく。

(1)　q_n は整数であることを示せ。

(2)　p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3)　α を $\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。

n を正の整数として,

$$f(x) = \frac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n - x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$$

とおく。$36n+1$ 個の整数

$$[\,f(0)\,],\ [\,f(1)\,],\ [\,f(2)\,],\cdots\cdots,\ [\,f(36n)\,]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta),\ \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n，Q_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を

$$\overrightarrow{OP_1} = (1,\ 0)$$
$$\overrightarrow{OQ_n} = \overrightarrow{OP_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n})\vec{a}$$
$$\overrightarrow{OP_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{OQ_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n})\vec{b}\right\}$$

で定める。ただし, O は原点で，$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{OQ_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{OP_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。

さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n \to \infty} x_n,\ \lim_{n \to \infty} y_n$$

を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

xyz 空間に 5 点 $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(-1,\ 1,\ 0)$, $C(-1,\ -1,\ 0)$, $D(1,\ -1,\ 0)$, $P(0,\ 0,\ 3)$ をとる。四角錐 PABCD の

$$x^2 + y^2 \geqq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$から，$f'(x)=0$は2つの実数解をもち，これを$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\dfrac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\dfrac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を$g(a)$とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3\\&=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$は$a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち$a=\pm1$のとき最小になる。

［解　説］

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題です。月刊誌『大学への数学』によく載っている上のような特殊な解法があります。しかし，この解法は知識として持っておかない限り，無理でしょう。ただし本問では，$f'(x)=0$の解が$x=\dfrac{2}{3}a,\ -\dfrac{2}{3a}$となりますので，$a$の正負で場合分けをして，直接$g(a)$を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

2

問題のページへ

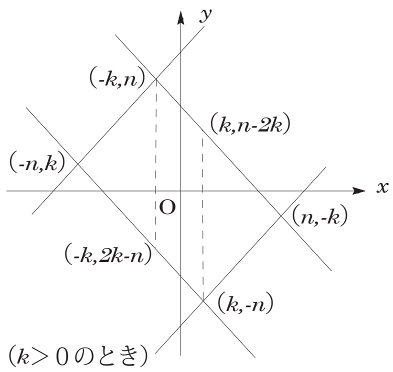
$z=k$ での切り口を考える。

$x+y+k\leqq n$ より，$y\leqq -x+n-k$

$-x+y-k\leqq n$ より，$y\leqq x+n+k$

$x-y-k\leqq n$ より，$y\geqq x-(n+k)$

$-x-y+k\leqq n$ より，$y\geqq -x-(n-k)$



切り口の存在する条件は，

$n-k\geqq -(n-k)$ かつ $n+k\geqq -(n+k)$

より，$-n\leqq k\leqq n$

境界線の交点は，

$y=-x+n-k$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-k,\ n)$

$y=-x+n-k$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(n,\ -k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-n,\ k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(k,\ -n)$

$z=k$ 上での格子点の個数を $f_k(n)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f_k(n)&=2\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-2k+1)\}+(2n-2k+1)(2k-1)\\
&=2\cdot\frac{1+(2n-2k+1)}{2}\cdot(n-k+1)+(2n-2k+1)(2k-1)\\
&=2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
f(n)=\sum_{k=-n}^{n}f_k(n)=\sum_{k=-n}^{n}\left[2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\right]
$$

ここで，$n-k+1=l$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(n)&=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{2l^2+(2l-1)(2n+1-2l)\right\}=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{-2l^2+4(n+1)l-(2n+1)\right\}\\
&=-\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)(4n+3)+4(n+1)^2(2n+1)-(2n+1)^2\\
&=\frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3)
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3}
$$

［解 説］

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。たとえ，教科書には載っていなくても，重要事項（平面の方程式）は知っていて当然というのが，出題者からのメッセージです。

3

問題のページへ

円C_{n-1}と円C_nが外接することより，

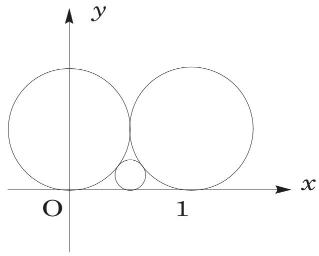
$$|r_{n-1}-r_n|^2+|x_n-x_{n-1}|^2=(r_{n-1}+r_n)^2$$

$$(x_n-x_{n-1})^2=4r_nr_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，

$$(x_{n+1}-x_{n-1})^2=4r_{n+1}r_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$$(x_{n+1}-x_n)^2=4r_{n+1}r_n\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$



(i)nが奇数のときは，$x_{n-1}<x_{n+1}<x_n$

①より，$x_n-x_{n-1}=2\sqrt{r_nr_{n-1}}$ ………①′

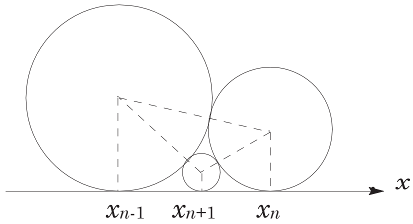
②より，$x_{n+1}-x_{n-1}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}$ ……②′

③より，$x_{n+1}-x_n=-2\sqrt{r_{n+1}r_n}$ ………③′

①′＋③′＝②′より，

$$2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}=2\sqrt{r_nr_{n-1}}-2\sqrt{r_{n+1}r_n}$$

$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$，よって，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$



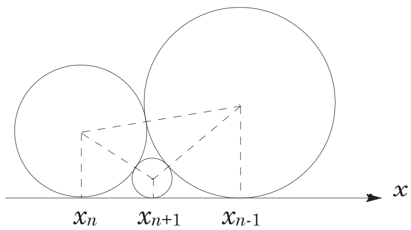
(ii)　nが偶数のときは，$x_n<x_{n+1}<x_{n-1}$

①より，$x_n-x_{n-1}=-2\sqrt{r_nr_{n-1}}$ ………①″

②より，$x_{n+1}-x_{n-1}=-2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}$ …②″

③より，$x_{n+1}-x_n=2\sqrt{r_{n+1}r_n}$ ………③″

①″＋③″＝②″より，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$



(i)(ii)のいずれの場合も，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$…④

ここで，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{8}$から，$q_1=\dfrac{1}{\sqrt{2r_1}}=1$，$q_2=\dfrac{1}{\sqrt{2r_2}}=2$

すると④から，帰納的にq_nはすべて整数となる。

(2)　(i)nが奇数のとき，③′より$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$

$$q_nq_{n+1}(x_{n+1}-x_n)=-1,\quad p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=-1\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(ii)　nが偶数のとき，③″より同様にして，$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=1$…………⑤′

⑤⑤′をまとめて，$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n$ ……………⑥

すると，$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$……………⑦

④を⑥に代入して，$p_{n+1}q_n-p_nq_n-p_nq_{n-1}=(-1)^n$ ……………⑧

⑦＋⑧より，$p_{n+1}q_n-p_nq_n-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}+(-1)^n$

$(p_{n+1}-p_n-p_{n-1})q_n=0$，$q_n\neq 0$から$p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$ ………⑨

ここで$p_1=q_1x_1=1\cdot 1=1$，$p_2=q_2x_2=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

すると⑨から，帰納的に p_n はすべて整数となる。

また，p_n と q_n が互いに素でないとすると，k_n を 2 以上の整数として，

$p_n = k_n p_n'$，$q_n = k_n q_n'$，$p_{n+1} = k_{n+1} p_{n+1}'$，$q_{n+1} = k_{n+1} q_{n+1}'$

⑥に代入すると，$k_n k_{n+1}(p_{n+1}' q_n' - p_n' q_{n+1}') = (-1)^n$ ……………⑩

$p_{n+1}' q_n' - p_n' q_{n+1}'$ は整数で，$k_n k_{n+1}$ は 4 以上の整数なので，⑩は不成立。

よって，p_n と q_n は互いに素である。

(3)　$p_1 = p_2 = 1$，$q_1 = 1$，$q_2 = 2$ と，④⑨より，$p_{n+1} = q_n$，$p_n = q_{n-1}$

これより，$x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{q_n}{q_{n+1}}$，$q_n = x_{n+1} q_{n+1}$ ……………⑪

$x_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n}$，$q_{n-1} = x_n q_n = x_n x_{n+1} q_{n+1}$ ……………⑫

⑪⑫を④に代入すると，$q_{n+1} = x_{n+1} q_{n+1} + x_n x_{n+1} q_{n+1}$

$q_{n+1} \neq 0$ から，$(1 + x_n) x_{n+1} = 1$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$

条件より，$\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ $(\alpha > 0)$ とすると，$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$|x_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+\alpha}\right| = \frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)}|\alpha - x_n| = \frac{\alpha}{1+x_n}|\alpha - x_n|$$

$\dfrac{\alpha}{1+x_n} < \alpha < \dfrac{2}{3}$ より，$|x_{n+1} - \alpha| < \dfrac{2}{3}|x_n - \alpha|$

すると，$|x_n - \alpha| \leqq |x_1 - \alpha|\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　（等号は $n = 1$ のとき成立）

$n \to \infty$ のとき，$|x_1 - \alpha|\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} \to 0$ から，$|x_n - \alpha| \to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

［解 説］

他の問題の 2 倍程度の量があります。本年度の 6 題中最も難しい問題です。(1)はよくある頻出題で，漸化式を立てることによって，q_n が整数であることを示すものです。ところが(2)は一筋縄ではいきません。p_n が整数であることをどのようにして示すかを見つけるのが最初の関門です。こんなときは具体的に考えます。④から $q_1 = 1$，$q_2 = 2$，$q_3 = 3$，$q_4 = 5$，$q_5 = 8$，$q_6 = 13$ となります。また，$p_1 = p_2 = 1$ から⑥を用いて次々に計算していくと，$p_3 = 2$，$p_4 = 3$，$p_5 = 5$，$p_6 = 8$ となり，これから数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の類似性が発見できます。これをもとにして，上の解をつくりました。

(3)も難問ですが，この試行が役に立ちました。それにしても「またまた出ましたフィボナッチ数列」という感じです。

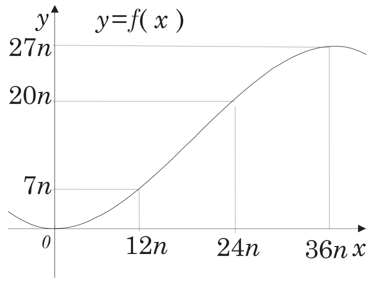
4

問題のページへ

$f(x)=\dfrac{2\cdot 3^3\cdot n\cdot x^2-x^3}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$ より，$f'(x)=\dfrac{2^2\cdot 3^3\cdot n\cdot x-3x^2}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}=\dfrac{-x(x-36n)}{2^5\cdot 3^2\cdot n^2}$

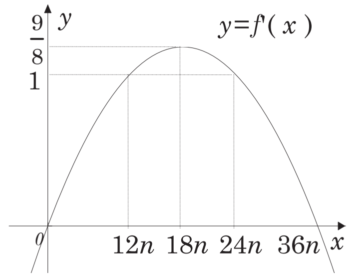
$0\leqq x\leqq 36n$ において，$f'(x)\geqq 0$ より，$f(x)$ はこの区間で単調増加

$f''(x)=\dfrac{2^2\cdot 3^3\cdot n-6x}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}=\dfrac{18n-x}{2^4\cdot 3^2\cdot n^2}$ から，



$y=f(x)$ のグラフは，$0<x<18n$ で $f''(x)>0$ より下に凸，$18n<x<36n$ で $f''(x)<0$ より上に凸。

ここで，$f'(x)=\dfrac{-(x-18n)^2}{2^5\cdot 3^2\cdot n^2}+\dfrac{9}{8}$ より，



$f'(x)=1$ とすると，$-x^2+36nx=2^5\cdot 3^2\cdot n^2$

$(x-12n)(x-24n)=0$，$x=12n$，$x=24n$

また，$f(12n)=7n$，$f(24n)=20n$

以上より，連続する 2 つの整数値に対する $f(x)$ の値の差は，$0\leqq x\leqq 12n$ と $24n\leqq x\leqq 36n$ では 1 より小で，$12n\leqq x\leqq 24n$ では 1 より大となる。

すると，$[f(0)]$，$[f(1)]$，……，$[f(12n)]$ のうちで相異なるものの個数は，$7n+1$ 個。$[f(12n+1)]$，$[f(12n+2)]$，……，$[f(24n-1)]$ のうちで相異なるものの個数は，$24n-12n-1=12n-1$ 個。$[f(24n)]$，$[f(24n+1)]$，……，$[f(36n)]$ のうちで相異なるものの個数は，$27n-20n+1=7n+1$ 個

合わせて，$(7n+1)+(12n-1)+(7n+1)=26n+1$ 個

［解 説］

この問題も前問と同じく難問です。$y=f(x)$ のグラフを書いたら $0\leqq x\leqq 36n$ で単調増加だったので，求める個数は $27n+1$ と推測して，この曲線の変曲点における接線の傾きが 1 より小を示せば一件落着と思いましたが，そんなに簡単ではありませんでした。$f'(18n)=\dfrac{9}{8}>1$ となったためです。そこで，軌道の修正を図ったのが上の解です。イメージ的には，1 辺の長さ 1 の正方形を設定して，と の 2 つの場合，整数 k に対して，何に着目すれば $[f(k)]$ の異なる値の個数が求まるかを考えたわけです。

5

問題のページへ

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a}$$
$$=(x_n,\ y_n)-(x_n\cos\theta+y_n\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=(x_n(1-\cos^2\theta)-y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta+y_n(1-\sin^2\theta))$$
$$=(x_n\sin^2\theta-y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta+y_n\cos^2\theta)$$
$$=(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)(\sin\theta,\ -\cos\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\}$$
$$=4(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)\left\{(\sin\theta,\ -\cos\theta)-\frac{1}{4}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)(\sqrt{3},\ 1)\right\}$$
$$=(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta,\ -\sqrt{3}\sin\theta-3\cos\theta)$$
$$=(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(1,\ -\sqrt{3})$$

よって，$x_{n+1}=(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)$ ……………①

$y_{n+1}=-\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(x_n\sin\theta-y_n\cos\theta)$ ………②

①②より，$y_{n+1}=-\sqrt{3}\,x_{n+1}$

これから，$y_n=-\sqrt{3}\,x_n$ （$n\geqq 2$）

①に代入して，$x_{n+1}=(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2x_n$ ………③

③より，$y_{n+1}=(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2y_n$ ………………④

なお初項は，①より $x_2=(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\sin\theta$

②より $y_2=-\sqrt{3}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\sin\theta$

以上より，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$が収束する条件は，

$\sin\theta=0$ または $0\leqq(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2\leqq 1$

(i) $\sin\theta=0$ のとき，$\theta=0,\ \pi$

(ii) $0\leqq(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2\leqq 1$ のとき，$-1\leqq\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\leqq 1$ となるので，

$-1\leqq 2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\leqq 1$ から，$-\frac{1}{2}\leqq\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\leqq\frac{1}{2}$

条件より $0\leqq\theta<2\pi$ なので，$\frac{5}{6}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{13}{6}\pi$

すなわち，$\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

(i)(ii)より，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$が収束する θ の範囲は，

$\theta=0$，$\frac{1}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$，$\theta=\pi$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$

ここで，③より $x_n=\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^{1+2(n-2)}=\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^{2n-3}$

④より $y_n=-\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^{1+2(n-2)}=-\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^{2n-3}$

これから，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ の値は，

$\theta=0,\ \pi$ のとき，$n\geqq 2$ で $x_n=y_n=0$ から $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

$\theta=\dfrac{1}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$のとき，$n\geqq 2$で$x_n=x_2=1$，$y_n=y_2=-\sqrt{3}$から

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\sqrt{3}$

$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$のとき，$n\geqq 2$で$x_n=x_2=-\dfrac{1}{2}$，$y_n=y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$から

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\dfrac{1}{2}$　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\pi<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$のとき，$-1<\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta<1$から

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

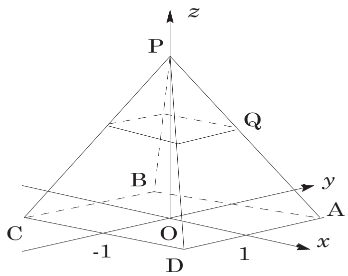
［解 説］

特別な考え方は必要でなく，計算力だけが問われている問題です。丁寧に計算すれば，完答することができます。もっともかなりの計算量はありますが。

6

問題のページへ

平面$z=k\ (k\geqq 0)$において，四角錐 PABCD の切り口を，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ に領域で考える。



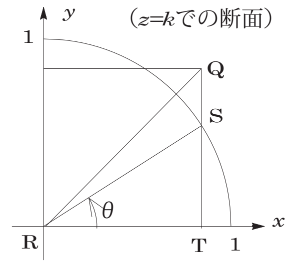
平面$z=k$とz軸との交点を R，辺 AP との交点を Q とする。

RQ : OA = PR : PO より，$\mathrm{RQ}:\sqrt{2}=(3-k):3$

$$\mathrm{RQ}=\frac{\sqrt{2}}{3}(3-k)$$

ここで，RQ≧1 とすると，$k\leqq 3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$

よって，$0\leqq k\leqq \dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$



さて，右の断面において，RS と x 軸の正方向とのなす角をθとする。

円柱$x^2+y^2=1$の外部（または面上）と四角錐 PABCD の内部（または面上）の共通部分を，

平面$z=k$で切断した断面の面積を$S(k)$とすると，$\mathrm{RT}=\mathrm{RQ}\sin\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{k}{3}$ より，

$$S(k)=2\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$$

$$=\left(1-\frac{k}{3}\right)^2\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)-\frac{\pi}{4}+\theta$$

$$=\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta\quad（\cos\theta=1-\frac{k}{3}\text{より}）$$

求める体積をVとすると，$-\sin\theta d\theta=-\dfrac{1}{3}dk$ より，

$$V=4\int_0^{\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})}S(k)dk=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)3\sin\theta d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^2\theta-\frac{\pi}{4}\sin\theta+\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=12\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\frac{\pi}{4}\cos\theta-\theta\cos\theta+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=12\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4+4\sqrt{2}-3\pi$$

［解　説］

空間では，$x^2+y^2=1$が円柱を表すということがわからないと手も足もでませんが，それがクリアーできれば，後は体積計算の基本です。上の解では z 軸に垂直に切りましたが，他の軸について切っても OK です。94 年に類題が出ています。